التطور المعاصر لنظرية المنطق

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
بيروت - ص.ب ١١-٧٤٩

التطور المعاصر لنظرية المنطق

اهداءات ١٩٩٤

السيد/ ماهر عبد القادر

الاسكندرية

التطوّر المعاصر لنظرية المنطق

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي
كلية الآداب
جامعة الإسكندرية وجامعة بيروت العربية

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
بيروت - ص.ب. ١١-٧٤٩

١٤٠٨ هـ - ١٩٨٨ م

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
بيروت - ص.ب ١١-٧٤٩

● الإدارة : بيروت، شارع مدحت باشا، بناية كريدية، تلفون: ٣٠٣٨١٦/ ٣٠٩٨٣٠/ ٣١٢٢١٣
برقياً : دانهضة، ص. ب ٧٤٩-١١
تلكس : NAHDA 40290 LE
29354 LE

● المكتبة : شارع البستاني، بناية اسكندراني رقم ٣، غربي الجامعة العربية، تلفون: ٣١٦٢٠٢

● المستودع : بئر حسن، تلفون: ٨٣٣١٨٠

بسم الله الرحمن الرحيم

اهداء

إلى عالم المنطق الأول ...

إلى من أحببته لذاته حبا خالصا

إلى الفيلسوف والمعلم ....

الأستاذ الدكتور محمد ثابت الفندي

تصدير

يشير الاستعراض الدقيق لمجهودات المناطقة وعلماء الرياضيات حتى البدايات الأولى من القرن العشرين إلى الاهتمام المتزايد بقضايا المنطق الرياضي وأساسياته، وقد تبلور هذا الاتجاه في كتابات رسل المبكرة، ثم في المؤلف القيّم الذي أخرجه «رسل ـ هوايتهد» فيما بين الأعوام ١٩١٠ ـ ١٩١٣ والمسمى برنكيبيا ماتيماتيكا، ذلك المؤلف الذي وضع القضايا موضعها الدقيق، واستطاع أن يبسط لنا قضايا المنطق والرياضيات برمتها في صورة رمزية دقيقة تخضع للبرهان الرياضي المحكم.

وكتاب البرنكيبيا أو مبادىء الرياضيات يعتمد أول ما يعتمد على فكرة النسق الاستنباطي، ولكن النسق الاستنباطي أو نظرية الاستنباط بأسرها تتخذ من فكرة التضمن ركيزة أساسية لها، إذ لا يمكن إحكام الاستنباط ونسقيته بدون الاستعانة بفكرة التضمن.

وفيما بعد برنكيبيا حاول المناطقة وعلماء الرياضيات تطوير نسق المنطق الرياضي، فاتضح لهم أن من بين الأفكار التي لا بد وأن يتناولها أي نسق فكرة التضمن ذاتها، فأخذوا يعملون الفكر من أجل التوصل إلى أنساق بديلة لنسق برنكيبيا، وهنا انشقت الأبحاث المنطقية إلى اتجاهات مختلفة: نظر لويس المنطقي الأمريكي إلى تطوير الفكرة داخلياً فميز بين التضمن والتضمن الدقيق، وحاول تقنين رمزية خاصة بفكرته الأساسية، وتقدم لبناء النسق،

وظل يتابع التطورات المنطقية والرياضية سنوات طويلة ويعدل في النسق بصورة أو بأخرى، ومع ذلك ظل نسق برنكيبيا كما هو وفشل البديل. ومن جانب آخر حاول لوكاشيفتش من خلال المنطق متعدد القيم أن يعثر على نسق تنسحب عليه الشروط التي تحقق دقته، ومع هذا جاءت رمزيته وأفكاره مختلفة أشد الاختلاف عن نسق برنكيبيا. ثم أقدم هلبرت على المحاولة وأطلق صيحته الصورية المشهورة التي أراد من ورائها تأسيس نسق أكسيوماتيكي يعتمد على الصورية البحتة، ولكن لم تتحقق له فكرته المنشودة في إحلال النسق الأكسيوماتيكي مكان نسق برنكيبيا. وفي اتجاه آخر كانت أبحاث كواين وهو من رواد المذهب اللوجستيقي المعاصر تسير بخطوات واسعة نحو إجراء تصحيحات وتعديلات شاملة ابتداء من المفاهيم والتصورات الأساسية للمنطق الرياضي، فطرح جانباً فكرة النسق البديل، وأخذ يطور المفاهيم الأساسية للمنطق، وقنن شروط التضمن وأسس العلاقة بين التضمن والشرط والشرط المزدوج، وميز بين الصحة والانساق المنطقي تمييزاً دقيقاً.

كل هذه الأفكار وتلك عرض لها القسم الأول في بحث مركز يكشف النقاب عن التطور النظري في جانب من أهم جوانب المنطق الرياضي وهو فكرة التضمن باعتبارها جوهر نظرية الاستنباط.

وكان من الطبيعي أن نتابع البحث والدرس في القسم الثاني في الأنساق المتعددة المعروضة على الفكر المنطقي اليوم، فخصصنا الفصلين الخامس والسادس لتناول أهم أنساق المنطق البولندي المعاصرة، إذ تعرض لنسقين متتاليين هما، نسق (يان لوكاشيفتش) رائد ومؤسس المدرسة المنطقية البولندية، وفيه يقدم بعض الأفكار الجديدة التي يحاول بها أن يقيم النسق الاستنباطي لنظرية حساب القضايا على أسس جديدة من التمييز الدقيق بين بعض الأفكار التي سبق لنسق برنكيبيا أن تناولها. وأما النسق الثاني فهو الأحدث تطوراً والذي ظهر في عام ١٩٦٧ وقدمه «سلوبسكي»

و «بوركوفسكي» في كتابهما عناصر المنطق الرياضي، عرْضا فيه لنظرية حساب القضايا، ونظرية حساب المحمول، ونظرية المجاميع، ونظريات الحساب الرياضي الأخرى المختلفة. وقد اخترنا من بينها جميعاً نظرية حساب القضايا، على اعتبار أنها تكشف عن نسق آخر مباين لنسق لوكاشيفتش سواء في مقدمات النظرية، أم في جوانبها البرهانية التطبيقية.

ويمكن الزعم بأن نسق سلوبسكي - بوركوفسكي، أبسط وأوضح الأنساق البولندية على الإطلاق، إذ يبتعد عن خاصية التعقيد، وينزع إلى البساطة والتحليل. وفي الوقت نفسه يمثل ما انتهى إليه الفكر المنطقي البولندي حتى الآن من ابتكارات نسقية. ومع هذا يظل التساؤل عن إمكانية ابتكار بدائل نسقية مخالفة لبرنكيبيا قائماً ومفتوحاً، إذ لم يغلق باب الاجتهاد بعد، وعلى المناطقة وعلماء الرياضيات أن يُعملوا الفكر والقلم.

وبعد فقد حصل المؤلف بهذا البحث على جائزة جامعة الاسكندرية للتشجيع العلمى عام ١٩٨١ .

أرجو أن يحقق هذا البحث بعض الإسهام النظري ، على الأقل ، في جانب إلقاء الضوء على الأنساق المتطورة .

والله أسأل التوفيق

ماهر عبد القادر

الإسكندرية في
١٦ مارس (آذار) ١٩٨٥

القســم الأول

فكرة التضمن في الأنساق المنطقية المعاصرة

الفصل الأول

لويس والتضمن الدقيق

يشير الاستعراض المنطقي لأبحاث المنطق حتى صدور البرنكيبيا إلى أن المنطق التقليدي منطق ثنائي القيم، بمعنى أن القضية الواحدة قد يكون لها أحد قيمتين: إما أن تكون القضية صادقة Ture ، أو أن تكون كاذبة Flase ، وقد تم التعبير عن هذه الخاصية التي تكتسبها القضايا بصورة واضحة وصريحة في ذلك المبدأ المنطقي الهام الذي صاغه أرسطو قديماً بعنوان « مبدأ الثالث المرفوع » Principle of Excluded Middle (Tertium non datur) .

إلا أن التطورات المنطقية والرياضية الحديثة، منذ القرن التاسع عشر، كشفت عن إمكانية التفكير بصورة أوسع وأشمل بعيداً عن المنطق الثنائي القيم. وعلى سبيل المثال نحن نجد أنه من الصعب في كثير من الأحيان في الرياضيات، وبعض فروع العلم الأخرى، أن يصرح بقيمتين للقضايا، إما لأنه لا يمكننا أن نبرهن على صدق القضايا أو كذبها، أو لأن نسبة أي من قيمتي الصدق أو الكذب للقضايا يفضي بنا إلى تناقضات Contradictions . ولقد أثبتت نظرية فيرما Fermat صحة هذا الرأي الأخير، حين ذهب هذا الرياضي الحاذق إلى أنه لا يمكننا أن نحل المعادلة $X^n + Y^n = Z^n$ ، في حالة ما إذا كانت $(n > 2)$. ورغم الجهود المضنية التي بذلها الرياضيون فلم يستطع أحدهم إثبات أن نظرية فيرما صادقة أو كاذبة. ومعنى هذا أن المعادلة تتجاوز نطاق مبدأ الثالث المرفوع، ولا تخضع له مباشراً.

لقد أجبر هذا الموقف الأخير المناطقة على السعي وراء محاولة العثور على قيم Values أخرى بدلا من صادق أو كاذب لبعض القضايا، وبالتدريج اتجه المناطقة إلى تصورات الجهة[1] Modal Concepts مثل: ممكن Possible - مستحيل impossible - حادث Contingent - ضروري necessary. ومثل هذه التصورات يمكن أن ننسبها للقضايا التي ليست هي صادقة أو كاذبة. من هنا نشأت فكرة المنطق الذي يسمح بثلاث قيم للقضايا، وهو ما نسميه المنطق ثلاثي القيم،... الخ. كما أن هناك مصطلحاً آخراً يطلق على المنطق الذي يتبنّى أكثر من قيمتين للصدق وهو مصطلح «منطق الجهة» Modal Logic، أو قد يستخدم المصطلح «المنطق متعدد القيم» Many - valued Logic.

ومع أن منطق الجهات أو المنطق المتعدد القيم قد نشأ تحت تأثير المشكلات والصعوبات الرياضية والمنطقية (مثل مشكلة القضايا المخالفة[2]

---

(١) تصور الجهة من التصورات المنطقية الهامة التي استخدمها أرسطو، وقد أشار الدكتور عبد الحميد صبره في مقدمته التحليلية الرائعة التي كتبها لتحليل «نظرية القياس الأرسطية» إلى هذه النقطة حيث يقول «يدل أرسطو على الجهات modalities بهذه الالفاظ التي نورده مع ترجمتها الانجليزية:

agcaion: necessary

ynaton: impossible

naton: possible

dechomenon: contingent

وهو يستخدم اللفظين الأخيرين على سبيل الترادف في كتاب العبارة. ولكن لما أحينا في كتاب «التحليلات الاولى» معنيين مختلفين. لذلك وجب التمييز بينهما في الترجمة راجع: يان لوكاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، منشأة المعارف، الاسكندرية، ١٩٦١، ص ٣٠.

(٢) يختلط الأمر على بعض المعربين أحياناً حين يترجمون المصلح الإنجليزي Paradox، و جربنا وراء محاولة لتعريب المصطلح بصورة تفي بأغراض البحث المنطقي، ولكن تبين بعد عناء البحث أن أفضل ترجمة هي تلك التي قام بها الدكتور عبد الحميد صبره، والتي

Paradoxical. Proposition أو القضايا الرياضية التي تقبل البرهان)، إلا أن لهذين النوعين من المنطق أهمية في الأبحاث المعاصرة، وليس أدل على هذا من تلك الأفكار القيمة التي دفع بها إلى المنطق الرياضي - منذ بداية القرن الحالي - المنطقي الأمريكي لويس[1] C. I. Lewis والتي أراد من خلالها تنشيط الأبحاث المنطقية في اتجاهات جديدة تستمد قوتها من المنطق الرياضي في صورته المعدلة كما وضعها «رسل - هوايتهد» في «برنكيبيا ماتماتيكا»، وفي

- يعلل فيها ترجمته للمصطلح على النحو الآتي: «من الكلمات التي يصعب ترجمتها إلى العربية كلمة «Paradox». والأصل في إطلاق هذه الكلمة أن تقال على الرأي doxa الخارج أو الشاذ، ومعنى الخروج أو الشذوذ هو ما تدل عليه الأداة Para. فتطلق مثلا كلمة Paradoxes على آراء زينون الأيلي في امتناع الكثرة والحركة لخروج هذه الآراء على ما يبدو أنه مقبول من الجميع. وقد يكون الخروج خروجاً عن البديهة والعقل؛ وحينئذ يبدو الرأي الخارج كأنه يحوي تناقضاً. لهذا ترجم بعضهم كلمة «Paradox» بـ «المتناقضة». وقد تصح هذه الترجمة في بعض الأحيان إلى حد ما. وقد يجوز أن نترجم كلمة «Paradox» في بعض استعمالاتها الشائعة بلفظ «المفارقة»، ولكن لتلك الكلمة في المنطق الحديث معنى اصطلاحياً لا مفر من التمييز بينه وبين التناقض تمييزاً قاطعاً، وقد دللنا على ذلك المعنى بكلمة «المخالفة». فالقضية «المخالفية» «Paradoxical» هي قضية يلزم عند افتراض صدقها أنها كاذبة. ويلزم عند افتراض كذبها أنها صادقة، في حين أن القضية المتناقضة هي قضية كاذبة وحسب. والمناطقة حين يتكلمون عن «مخالفات» رسل مثلاً، إنما يقصدون قضايا من ذلك النوع الذي وصفناه».

راجع: يان لوكاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، ص ٢٣.

(١) من أهم كتابات لويس في المنطق الرياضي:

- A survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.
- « Alternative Systems of logic», Monist, 42, 1932.
- Lewis, C.I & C. H. Langford., Symbolic Logic, New york, 1932.

ويعد الكتاب الأول والكتاب الثالث الذي كتب بالاشتراك مع لانجفورد من أهم إسهامات لويس في المنطق الرياضي على الإطلاق، وسوف نعتمد عليهما معاً في تتبع أفكار لويس بالإضافة إلى بعض الكتابات الأخرى مما سنذكره في حينه.

نفس الوقت تحاول حل بعض المعضلات الأساسية التي لا زالت تستحوذ على اهتمام المناطقة وعلماء الرياضيات منذ ظهرت المتناقضات والقضايا المخالفية.

ولذا فإننا نفضل أن نتعرف على أفكار لويس المنطقية حتى نقف على مدى التطور الذي حدث في المنطق الرياضي في بعض أفكاره وقضاياه الأساسية، خاصة وأن هذه التطورات امتدت عبر نصف قرن من الزمان، ظل لويس يتابعها متابعة دقيقة منذ بداية القرن الحالي وحتى منتصفه أو ما يزيد، مما يثبت أصالته في البحث ودقته وبراعته وحيويته الفكرية.

لويس وفكرة التضمن

بدأ المنطقي الأمريكي لويس أبحاثه المنطقية من خلال نقد تصور التضمن كما عرفه برتراند رسل. فمن وجهة نظر لويس يأخذ رسل بفكرة التضمن المادي، وهذا ما لا يتفق مع أفكار لويس الأساسية، رغم أن لويس يستخدم قاعدة رسّل القائلة «القضية الكاذبة تتضمن أي شيء والقضية الصادقة متضمنة في أي شيء». مثال ذلك (القضية الكاذبة تتضمن أي شيء) «القمر مكون من الجبن الأبيض، تتضمن القضية ٢ + ٢ = ٤». في نسق رسل للتضمن المادي ينتج أنه يوجد فصل من القضايا لا يمكن تطبيقه على الاستدلال الصحيح، وبصورة مماثلة يكون الفصل الفارغ محتوى في أي فصل.

يرى لويس أن النتائج الشاذة التي تنتج لدينا في هذه الحالات ترجع إلى أن علاقة التضمن عند رسل علاقة ما صدقية، لذلك فإن لويس يتجه إلى تحديد علاقة التضمن بصورة أدق بحيث تصبح هذه العلاقة وكأنها الأساس الدقيق لإنجازه المنطقي.

يعرف لويس التضمن الدقيق Strict Implication على النحو التالي: «من المستحيل أن p تكون صادقة، q كاذبة». وعلى هذا الأساس يحاول تقديم

علاقة مفهومية بين q،p حيث يربطها بتصور « الضرورة » necessity وهذا هو التضمن الدقيق. ويستخدم لويس بعض الرموز الخاصة لتمييز فكرة التضمن الدقيق عن فكرة رسل، وتنحصر رموزه في ثلاثة أنواع:

١ - الرمز ~ ويشير به للاستحالة Impossible

٢ - الرمز - ويشير به للسلب Negation

٣ - الرمز ⥽ ويشير به للتضمن الدقيق Strict Implication

وبناء على هذه الأفكار الثلاثة يضع لويس التعريف الآتي للتضمن الدقيق (١):

$$p \prec q = \sim (p. - q) \quad df$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي:

« من المستحيل أن p تكون صادقة و q تكون كاذبة »

لكن إذا كان لويس قد أراد أن يضع ذلك التعريف الدقيق للتضمن

---

(١) نحن نلاحظ أن لويس بهذا التعريف قد أدخل الجهات modalities إلى أنساق المنطق الرياضي؛ وقد كان « ماك كول » Hugh Mac Coll أول من استفاد من تصور الجهة في مؤلفه « المنطق الرياضي وتطبيقاته » (Symbolic logic and its Applications) الذي صدر في عام ١٩٠٦، وقد اعتمد لويس على مؤلفات ماك كول في هذه الفكرة. كذلك كان ماك كول يضع في اعتباره توقيع الصدق أو الكذب فيما يتعلق بموجهات الأحكام modalities of Judgments: الضرورة، الحقيقة، الإمكانية. وطبقاً لرأي ماك كول فإن المحمولات الأساسية للأحكام هي: اليقين، المستحيل؛ صادق، كاذب، المتغير. ومعنى المتغير هو أنه ليس يقينياً ولا مستحيلا. إن المتغير من الممكن أن يكون صادقاً ومن الممكن أن يكون كاذباً. وحتى نكون أكثر دقة، فإن العبارة القائلة: من الممكن لقضية p أن تكون صادقة أو كاذبة، هذه العبارة تعني أن القضية غير يقينية. ومن الواضح - عكس نسق رسل - أن التطورات التي قدمها ماك كول ثم تبناها لويس فيما بعد لها ما يقابلها في اللغة العادية.

كبديل لتعريف رسل، فإنه يترتب على هذا أن يزودنا بنسق تختلف مقدماته عن ذلك النسق المألوف عند رسل ـ هوايتهد، أو ما نعرفه بنسق البرنكيبيا. وقد فعل لويس، إذ نحن نجده يرتب أفكاره المنطقية في نسق دقيق بصورة توحي بأننا على وشك الالتقاء بالوريث الشرعي للبرنكيبيا.

لويس ونسق المنطق الرياضي

يبدأ نسق المنطق الرياضي عند لويس بمجموعة من الأفكار الابتدائية، ثم مجموعة من التعريفات وهي ثلاث، تتلوها القضايا الابتدائية التي تعد بمثابة مسلمات النسق، والتي تأخذ أرقاماً على غرار الترقيم المعهود في البرنكيبيا، ثم ينتقل لويس من هذه وتلك إلى النظريات والبرهنة عليها مستخدماً ثلاث قواعد أساسية هي الاستبدال، والتقرير اللاحق، والاستدلال.

أولا : الأفكار الابتدائية

١ ـ القضايا، ويرمز لها بالرموز p، q، r، ....

٢ ـ السلب مثل p ~ وتعني « p كاذبة » أو «not - p».

٣ ـ حاصل الضرب المنطقي Logical Product مثل p q أو (p q) وتعني أن كلا من p، q صادقتان.

٤ ـ الامكانية Possibility أو الاتساق الذاتي Self-Consistency مثل ‘◇p’ وتعني أن « p ممكنة » أو تقرأ « من الممكن أن تكون p صادقة ».

٥ ـ التكافؤ المنطقي logical Equivalence مثل p = q وهي أيضاً علاقة التعريف[١].

---

(١) لقد تبنى لويس في كتابه A survey of symbolic logic الفكرة الابتدائية « الاستحالة » والتي يشير إليها بالرمز (~) بدلا من الإمكانية. وحتى لا تختلط الفكرة بالسلب فقد أشار «

ثانياً: التعريفات Definitions

١ ـ تعريف الفصل Disjusction (p v q) ويعنى على الأقل واحدة من القضيتين p أو q تكون صادقة. ويعرف الفصل كما يلي:

11.01 $p \vee q = \sim(\sim p \sim q)$

٢ ـ تعريف التضمن الدقيق بدلالة السلب والامكانية وحاصل الضرب المنطقي.

11.02 $p \prec q = \sim \Diamond (p \sim q)$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي:

«ليس من الممكن أن تكون p صادقة، q كاذبة».

٣ ـ علاقة التعريف «التكافؤ» ويعرفها على أنها تضمن دقيق مزدوج كما يلي:

11.03 $p = q = p \prec q . q \prec p$

ثالثاً: القضايا الابتدائية

وهذه القضايا كما سبق أن ذكرنا تعد بمثابة مسلمات النسق[١]، وهي:

= لفكرة السلب بالرمز (−)، ولكنه أخيراً في كتابه Symbolic logic الذي دونه بالاشتراك مع لا بجفورد حذف هذه الفكرة حتى يتجنب الاختلاط، ووضع فكرة الإمكانية التي رمز لها بالرمز (◊). ومن ثم فإن تصور الاستحالة عنده يعرف عن طريق علاقتين هما السلب العادي (~) Ordinary Nagation والإمكانية (◊) بحيث أن الرمز (◊ ~) ككل يعني عدم الامكانية.

(١) لقد بين ماكينزي J. C. C Mckinsey في مقالة له بعنوان A Reduction in the Number of Postulates for C. I. Lewis's System of Strict Implication ص ١٢٥ ـ ص ٤٢٧ أن المسلمة الخامسة 5.11 يمكن أن تشتق من المسلمات الخمس الأخرى.

11.1 $p\,q \prec q\,p$

11.2 $p\,q \prec p$

11.3 $p \prec p\,p$

11.4 $(p\,q)r \prec (q\,r)$

11.5 $p \prec \sim(\sim p)$

11.6 $(p \prec q \,.\, q \prec r) \prec p \prec r$

11.7 $(p\,q \prec q) \prec q$

لكننا نلاحظ أن لـويس في أول كتـابـاتـه « مسـح للمنطـق الرمـزي » « ١٩١٨ » بدأ بالمسلمات الآتية:

(1) $p\,q \prec q\,p$

(2) $q\,p \prec p$

(3) $p \prec p\,p$

(4) $p(q\,r) \prec q\,(p\,r)$

(5) $p \prec \sim(\sim p)$

(6) $(p \prec q \,.\, q \prec r) \prec p \prec r$

(7) $\Diamond p \prec p$

(8) $p \prec q = \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$

لكننا حتى في هذه الحالة يمكن أن نصل إلى النتيجة.

$$\sim \Diamond p = \sim p$$

أي أن « الاستحالة متطابقة مع الكذب »، ومن ثم ينتهي التمييز الذي حاول لويس إقامته بين التضمن الدقيق والتضمن المادي، وبالتالي يصبح من الممكن رد نسقه إلى ذلك النسق المعروض في البرنكيبيا، وهـذا بطبيعـة الحال

يقودنا إلى ضرورة مراجعة نسق لويس ومحاولة استبدال المسلمة رقم « ٨ » بالمسلمة الآتية:

(8′) . p ⥽ q ⥽ r . ~ ◇ q ⥽ ~ ◇ p

وربما تنبه لويس إلى مثل هذه الفكرة، حين كتب المنطق الرمزي في عام ١٩٣٢ بالتعاون مع لانجفورد Langford حيث حاول أن يضع نسق المنطق في صورة أكثر صورية بحيث يمكن البرهنة فيه على عدد قليل من النظريات، ولذلك فقد أطلق على هذا النسق المصطلح S1، أي النسق 1 الذي يستند إلى المسلمات من 11.1 إلى 11.6، وبالتالي تم تعديل النسق المعروض في مؤلفه « مسح للمنطق الرمزي » مرة أخرى على أساس المسلمات « ١ ـ ٧ » بالإضافة إلى المسلمة (8′) وأطلق على النسق في هذه الحالة S3.

رابعاً: النظريات

يمكن اشتقاق نظريات النسق عن طريق تطبيق عمليات الاستبدال أو التقرير اللاحق أو الاستدلال حيث:

١ ـ الاستبدال Substitution

أ ـ أي قضايا مرتبطة بعلاقة التكافؤ (=) يمكن أن نضع الواحدة منها مكان الأخرى.

ب ـ في أي قضية فإن أي متغير p، q، r، ... يمكن أن نضع بدلا منه قضية أخرى « أو متغير قضائي ».

والطريقة التي يمكن بواسطتها أن تحدد الرموز الابتدائية « الأفكار الابتدائية » لتكون قضايا يمكن تعريفها كما يلي:

ـ p، q، r، ... قضايا.

- إذا كانت p قضية، إذن p, p ◇ هي قضايا.
- إذا كانت q, p قضايا إذن (p . q)، (p = q) هي قضايا أيضاً.

٢ - التقرير اللاحق Adjunction

إذا أمكن تقرير القضيتين q, p منفصلتين إذن فمن الممكن تقرير حاصل ضربها أي (p q).

٣ - الاستدلال Inference

إذا أمكن تقرير p, q -3 إذن فمن الممكن أيضاً تقرير q.

والإجراء الذي يمكن عن طريق تطبيقه تصبح هذه العملية معدَّة للبرهنة على أن النظرية ذاتية، مشابه لـذلـك الإجـراء الذي اتبعـه رسـل وهـوايتهـد في البرنكيبيا، وهنا يمكن التوصل لسلسلة من النظريات.

التضمن الدقيق والتضمن المادي.

كما نعلم فإن رسل يعرف التضمن المادي والتكافؤ المادي كما يلي:

$$p \supset q = (p. \sim q)$$

4.01 $\quad p \equiv q = (p \supset q) . (q \supset p)$

فاذا وضعنا في الاعتبار التعريف الذي يقدمه لويس للتضمن الدقيق، فإنه يمكن وضع التعريف الآتي:

12.81 $\quad p \prec q \prec \sim (p \sim q)$

وعلى أساس قاعدة الاستبدال (١) فإننا نحصل على.

4.1 $\quad p \prec q \prec (p \supset q)$

أي « إذا كانت p تتضمن q تضمنا دقيقا فإن p تتضمن q تضمنا ماديا أيضاً » والعكس غير صحيح.

ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن التضمن المادي أوسع وأشمل من التضمن الدقيق، ويترتب على هذا أنه إذا كانت $p \prec q$ مبرهنة، فإن $p \supset q$ مبرهنة أيضاً كحقيقة واضحة. وبهذه الصورة فإن كل المسلمات والتعريفات في نسق البرنكيبيا يمكن للبرهنة عليها في نسق التضمن الدقيق. إلا أننا نجد أن نسق برنكيبيا في عملياته البرهانية يستخدم الاستبدال والاستدلال المرتبط بالتضمن المادي للبرهنة على كل النظريات المعروضة داخل النسق؛ لكن نسق لويس يستخدم الاستبدال كعملية أساسية للبرهان، ولا يشير إلى استخدام الاستدلال داخل النسق، ومع هذا فإن النسق يفتح الباب لامكانية استخدام الاستدلال، حيث:

$$T4.29 \quad p \,.\, p \supset q \prec q$$

ذلك لأن $p \,.\, p \supset q$ هي نظرية، كما أن $p \supset q$، p نظريات أيضاً عن طريق التقرير اللاحق. ومن ثم فانه بتطبيق 14.29 يمكن استنتاج أن القضية q هي نظرية أيضاً، ويترتب على هذا أن أي شيء يمكن أن يستنبط بالطرق المألوفة في برنكيبيا ماثيماتيكا فإنه يمكن ان يستنبط ايضا في نسق لويس.

علاقة الاتساق The Consistency Relation

وقد يلاحظ أيضاً أن تصورات الاتساق واستقلال قضيتين لا يمكن إيضاحها تماما في حدود وتصورات التضمن المادي. وفي اللغة العادية يقال لقضيتين إنهما متسقتان مع بعضهما حينما تأخذ أيهما كمقدمة كذب الأخرى، وبلغة المنطق الرياضي فإن.

$$(p \sim q)$$

أو

$$\sim (q \supset \sim p)$$

ويقال لقضيتين إنهما مستقلتين إذا لم يمكن اشتقاق كلاهما من الأخرى كمقدمة.

$$\sim (p \supset q)$$

و

$$\sim (q \supset p)$$

ونحن نعلم أن مسلمات أي نظرية رياضية أو منطقية يجب أن تكون مستقلة ومتسقة، ولكننا إذا قبلنا تصور قابلية الاستنباط الذي تعبر عنه علاقة التضمن المادي، فإنه سيصبح من الواضح أنه لن توجد قضيتان متسقتان ومستقلتان مثال ذلك.

15.3 $\sim (p \supset q) \prec p \supset \sim q$

هذه النظرية تقول «إذا لم يكن من الممكن اشتقاق 'q' من 'p' إذن «q، 'p' غير مستقلتين».

كذلك فان

15.32 $\sim (p \supset \sim q) \prec p \supset q$

تعني «إذا كانت p، q غير متسقتين إذن يمكن اشتقاق q من p»، ويترتب على هذا المعنى نتيجة هامة هي أن p، q ليستا مستقلتين. وبلغة التضمن الدقيق التي يستخدمها لويس فإن هذه المواضع المخالفية تختفي إذا

أخذنا في اعتبارنا المماثلات التي تعبر عنها النظريات الآتية، والتي لا يمكن البرهنة عليها ومن ثم فهي كاذبة:

$$\sim (p \prec q) \prec p \prec \sim q$$
$$\sim (p \prec q) \prec p \prec q$$
$$\sim (p \prec q) \prec q \prec p$$

على هذا النحو يبدو لنا أن تصور الاتساق يأخذ معناه الذي يقترب من المعنى الدارج للكلمة إذا نظرنا لعلاقة التضمن كعلاقة اشتقاق. لقد رمز لويس لعلاقة الاتساق بالرمز o، وهو يعرف هذه العلاقة كما يلي:

17.01 $\quad p \circ q = \sim (p \prec \sim q)$

وهذا التعريف يعني أن « p، q متسقتان ». وهذه الصيغة تفضي بنا إلى مجموعة أخرى من الصيغ في منطق لويس.

ولكن السؤال الهام الآن: كيف يعالج لويس دوال الموجهات؟ وهل يمكن أن نتبين الأبعاد الجديدة في منطق لويس فيم يتعلق بالموجهات؟

دوال الموجهات وكيفية اختزالها في منطق لويس

رغم أنه من الممكن البرهنة على التكافؤ الآتي:

18.1 $\quad \Diamond p = p \circ p = \sim (p \prec \sim p)$

إلا أن لويس لاحظ أنه يمكن استخدام هذا التعريف في تعريف تصور الإمكانية إذا أخذنا في الاعتبار تصور الاتساق أو التضمن الدقيق كمفهوم ابتدائي، حيث:

من 18.1 '$\Diamond$ p' « p ممكنة » تعني أن « p متفقة مع ذاتها » أو أن « p تتضمن نفيها الذاتي ».

والتعبير ($\Diamond p$) ~ الذي نكتبه كما يلي $\sim \Diamond p$ يعني « من الكذب أن p ممكنة » أو « p مستحيلة » أو « p ليست متفقة مع ذاتها » أو « p تتضمن نفيها الذاتي »:

$$18.12 \quad \sim \Diamond p = \sim (p \circ p) = p \prec \sim p$$

التعبير ($\sim p$) $\Diamond$ أو $\Diamond \sim p$ يعني « من الممكن أن p تكون كاذبة » أو « ليست p صادقة بالضرورة »، أو إذا أخذنا في اعتبارنا التكافؤات:

$$18.13 \quad \Diamond \sim p = \sim p \circ \sim p = \sim (\sim p \prec p)$$

هذه التعبيرات تعني أن « نفي p ليس متسقاً » أو أن « صدق p لا يمكن أن يستنبط من نفيها الذاتي ».

والتعبير [($\sim p$) $\Diamond$] ~ أو $\sim \Diamond \sim p$ الذي يضعه لويس يعني: « من المستحيل أن تكون p كاذبة ». وبالتالي فإن « p تكون صادقة بالضرورة » أو بالصورة الرمزية الآتية:

$$18.14 \quad \sim \Diamond \sim p = \sim (\sim p \circ \sim p) = \sim p \prec p$$

أي « نفي p ليس متسقاً » أو « يمكن اشتقاق صدق p من نفيها الذاتي » وعلى هذا فإنه يمكن مقارنة التكافؤات الآتية:

$$.8.1 \quad p = p \sim (\sim p) = \sim (p \supset \sim p)$$

$$8.12 \quad \sim p = \sim [p \sim (\sim p)] = p \supset \sim p$$

$$8.13 \quad \sim p = \sim p \sim p = \sim (\sim p \supset p)$$

$$8.14 \quad p = \sim (\sim p \sim p) = \sim p \supset p$$

فإذا وضعنا العلاقات الدقيقة $\circ$ ، $\prec$ بدلاً من العلاقات المادية الحاصل

الضرب المنطقي والتضمن المادي في التكافؤات السابقة، فإن التمييزات بين: ممكن، صادق، ضروري، وبين مستحيل الكذب، ممكن الكذب، يمكن استبعادها، ويصبح المنطق بذلك منطقاً ثنائي القيم. وحتى يوضح لويس التصورات: يمكن، مستحيل، ضروري، فإنه يدخل التمييز بين المعنى النسبي Relative والمعنى absolute لهذه الجهات. والمعنى النسبي - كما يستخدمه لويس - يشير إلى العلاقة بين القضية الملائمة وبين حالة الوقائع المعينة مثل، المعطيات الأولية، معرفتنا عن الواقعة الملائمة للحظة معينة، وهكذا. ومن هذا المنطلق فإن المصطلح « ممكن » عند لويس يعني الاتساق مع حالة الأشياء الملائمة. أما المصطلح « مستحيل » فيعني اللااتساق مع حالة الوقائع. والمصطلح « ضروري » يعني ما تتضمنه حالة الأشياء القائمة. ومن جهة أخرى فإن المعنى المطلق يشير إلى القضية، وعلاقتها الذاتية وعلاقتها بنفيها. ومثل هذه العلاقة تنتج من التحليل المنطقي للقضية الملائمة. ومن ثم فالمعنى الملائم للإمكانية يصبح أوسع من المعنى المطلق بل ويتضمنه.

يعالج لويس الجهات في معناها المطلق ويؤسس علاقات الجهة الآتية:

الصدق يتضمن الإمكانية	18.4 $p \mathbin{-\!\!3} \Diamond p$
الاستحالة تتضمن الكذب	18.14 $\sim \Diamond p \mathbin{-\!\!3} \sim p$
الضرورة تتضمن الكذب	18.42 $\sim \Diamond \sim p \mathbin{-\!\!3} p$
	18.5 $p \mathbin{-\!\!3} q . \sim \Diamond \sim \mathbin{-\!\!3} \sim \Diamond p$

« إذا لم يكن التالي ممكناً، إذن فالمقدم مستحيل أيضاً ».

18.52 $p \mathbin{-\!\!3} q . \Diamond \sim q \mathbin{-\!\!3} \Diamond \sim p$

« إذا كان التالي ممكن الكذب، إذن فالمقدم ممكن الكذب أيضاً ».

تطوير نسق الموجهات عند لويس وحجة بيكر

اعتبرت أفكار لويس فيا يتعلق بنسق قضايا الموجهات من الإسهامات الجيدة والدقيقة في المنطق الرياضي المعاصر. ولكن بيكر Becker أسس حجة عن نسق لويس للموجهات، يبدأ فيها بالإشارة إلى أن لويس كان معنيا بالحديث عن ست جهات فحسب هي: صادق ـ كاذب ـ ممكن ـ مستحيل ممكن الكذب ـ ضروري. مع الوضع في الاعتبار الجهات التأليفية مثل $\diamond \sim \diamond \sim$ التي ذكرها لويس في منطقة عام ١٩٣٢ والتي تعني أنه « من الضرورة أنه مستحيل ». لقد برهن ماكينزي Mackinsey في مقالة له بعنوان « برهان على أنه توجد موجهات متعددة في نسق لويس S_2 » على أنه في النسق S_2 وفي النسق S_1 أيضاً يوجد عدد لانهائي من هذه الموجهات المركبة غير القابلة للرد. ولقد أوضح ماكينزي أيضاً كل الجهات من النوع $\diamond \ldots \diamond \diamond$ أو $\diamond$ غير قابلة للرد ومن ثم فإن الجهات عن طريق التأليفات تفضي إلى موجهات جديدة غير قابلة للرد، وهذا يعني أن نسق لويس نسقاً مفتوحاً.

يرى بيكر أنه إذا اضيفت المسلمة A إلى المسلمات 11.7-11 11 في نسق لويس فانه ينتج.

$$\text{1)} \quad p \prec q \prec \diamond p \prec \diamond$$

لكن بيكر يحاول تطوير رمزية لويس إلى رمزية أفضل بحيث يقضي على بعض الصعوبات التي يمكن أن تعترض البرهنة على القضايا. ولذا فإنه يستخدم الرمز $\Box$ ليعني به « أنه من الضروري ».

$$\Box p = \sim \diamond \sim p$$

القضية « p ضرورية » تعني « من الكاذب أنه ممكن أن تكون p كاذبة » « من المستحيل أن تكون p كاذبة ».

ويبدأ بيكر في وضع بديهيات النسق بصورة جديدة حيث.

$$\Box p \ \text{⥽}\ \Box \Box p$$

أي « الضرورة تتضمن ضرورة الضرورة». وهذه البديهية تسمح باختزال الجهات كما يلي:

$$\Box^{n} p \ \Box p$$

$$\Diamond^{n} p = \Diamond p$$

وينتج عن ذلك أن

$$p \ \text{⥽}\ p \ \text{⥽}\ \Box p \ \text{⥽}\ \Box q$$

$$\Box p \ \text{⥽}\ \Box \Diamond \Box p$$

$$\Diamond \Box \Diamond p \ \text{⥽}\ \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^{n} p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^{n} p = \Diamond \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^{n} p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^{n} p = \Diamond \Box p$$

وباستخدام المبرهنات السابقة فإن كل الموجهات المركبة يمكن اختزالها في ١٤ موجهة أساسية. فعلى سبيل المثال عندما تتكون الموجهة من خط النفي البسيط ~، فإنه إذا طبقنا قاعدة النفي المزدوج على اعتبار أنها ضرورية فإن القضية p تنتج (إذا كان عدد علامة النفي ~ صحيح).

$$(\sim)^{2n} p = p$$

أو أن نفي p ~ (إذا كان عدد علامة النفي شاذا)

$$(\sim)^{2n+1}\, p = (\sim)^{2n}\, p = \sim p$$

وهكذا فان الموجهات غير التامة تختزل إلى موجهتين أساسيتين: الصدق 'p' ، الكذب '~p'. وتكون الموجهات تامة Proper عندما يظهر الرمز □ أو الرمز ◇ فعلا. وعلى أساس النظريات المؤسسة نحصل على الموجهات المثبتة غير القابلة للاختزال كما يلي:

$$\Box\Diamond\Box \qquad , \Box\Diamond \qquad , \Box$$
$$\Diamond\Box\Diamond \qquad , \Diamond\Box \qquad , \Diamond$$

ومن السهولة بمكان أن نلاحظ أن الموجهة السلبية تناظر موجهة مثبتة، إذا أضيفت علامة النفي في النهاية. ومن ثم يوجد لدينا ٣ + ٣ مثبتة، ٣ + ٣ منفية، ٢ موجهة غير تامة، ويصبح العدد الاجمالي لهذه الموجهات ١٤ موجهة أساسية غير قابلة للرد أو الاختزال، وبالتالي يوجد عدد من التضمنات الدقيقة بين التضمنات الست المثبتة، خاصة:

$$\Box p ⥽ \Box\Diamond\Box p ⥽ \Diamond\Box p ⥽ \Diamond\Box\Diamond p$$
$$⥽ \Diamond p$$
$$\Box p ⥽ \Box\Diamond\Box p ⥽ \Box\Diamond p ⥽ \Diamond\Box\Diamond p$$
$$\Box\Diamond p$$

ويمكن استخدام السهم → بدلا من العلامة ⥽ وبالتالي يمكن كتابة العلامات السابقة على هذا النحو:

$$\to \quad \Diamond\Box p \quad \leftarrow$$
$$\Box p \to \Box\Diamond\Box p \quad | \; | \qquad\qquad | \; \Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$$
$$\to \quad \Box\Diamond p \quad \leftarrow$$

تلك هي التضمنات الأساسية، وقد برهن W.T. Parry على أنه لا توجد تضمنات أخرى. لكننا إذا ما مضينا في دراسة الموجهات في نسق لويس، فسوف يتضح لنا أن بيكر Oskar Becker يضيف مسلمة أخرى للنسق S_4 هي:

$$\Diamond p \mathrel{-\!\!3} \Box \Diamond p$$

وينتقل من هذا إلى تعريف النسق S_5 الذي تقبل فيه الموجهات الرد إلى ٦ موجهات فقط هي:

أ ـ موجهتين غير تامتين [p صادقة، $\sim p$ كاذبة].

ب ـ أربع موجهات تامة، اثنتان منهما مثبتتان (صادق بالضرورة $\Box p$، ممكنة الصدق $\Diamond p$) واثنتان سالبتان (كاذب بالضرورة أو مستحيل $\Box \sim p$، ممكن الكذب $\Diamond \sim p$).

الفصل الثاني

لوكاشيفتش والمنطق متعدد القيم

أسهم المنطقي البولندي « يان لوكاشيفتش »[1] Jan Lukasieweiz في إثراء الدراسات المنطقية المعاصرة، فصحح وعدل، وحذف وأضاف، وطور

---

(١) لخص الدكتور تشسلاف ليفسكي Czeslaw Lejewski حياة يان لوكاشيفتش والآراء المنطقية الهامة التي قدمها ومدرسته في المقدمة التي كتبها للطبعة العربية التي جاءت ترجمة لكتاب نظرية القياس الأرسطية، والتي قام بها الدكتور عبدالحميد صبره. حيث يقول: « ولد يان لوكاشيفتش في لفوف سنة ١٨٧٨. ودرس في الجمنازيوم الفيلولوجي هناك، حيث تلقى معرفة متينة باللاتينية واليونانية. فكان باستطاعته حتى بلوغه السبعين أن يلقي عن ظهر قلب أشعاراً من هوراس وفقرات من هوميروس. وفي سنة ١٨٩٧ انتظم في جامعة لفوف لدراسة الرياضيات والفلسفة ، وبعد أن أتم برنامجاً دراسياً تحت إشراف الأستاذ تفاردوفسكي Twardowski حصل على شهادة الدكتوراه في الفلسفة سنة ١٩٠٢. وعاد إلى لفوف سنة ١٩٠٦ حيث عين محاضراً في الفلسفة ومما يجدر ملاحظته أن سلسلة محاضراته الأولى كان موضوعها « جبر المنطق » وظل يقوم بالتدريس في جامعة لفوف حتى بداية الحرب العالمية الاولى، وفي سنة ١٩١٥ انتقل إلى وارسو ليحاضر في الفلسفة في جامعتها ثم ترك الجامعة عام ١٩١٨ ليشغل وظيفة عالية في وزارة التربية البولندية، وفي سنة ١٩١٩ كان وزير التربية في حكومة باديريفسكي، وفي نهاية ذلك العام استأنف حياته الأكاديمية فكان حتى سبتمبر ١٩٣٩ أستاذاً للفلسفة في جامعة وارسو - وفي خلال هذه المدة دعي لشغل وظيفة مدير للجامعة مرتين الأولى ١٩٢٢ - ١٩٢٣ ، والثانية عام ١٩٣١ - ١٩٣٢ ».

وفي الأيام الاولى من الحرب العالمية الثانية دمرت شقة لوكاشيفتش في غارة جوية. - وأتى الحريق الذي نشب في أثر ذلك على مكتبته كلها - وفيها مؤلفاته المخطوطة ومذكراته...

المفاهيم والمصطلحات، وأخذ بيد الدراسات المعاصرة في المنطق الرياضي وزودها بدفعات قوية حفزت المناطقة من بعده، أو على الأقل جيل تلامذته من المدرسة البولندية، إلى تطوير أبحاث المنطق بما يتلاءم مع طبيعة الدراسة في هذا العلم.

ومن أهم الابحاث التي أثراها لوكاشيفيتش « تلك الخاصة بتصور الجهة في

- كان لوكاشيفتش أقدم تلامذة كاتسيميرتس تفاردوفسكي (١٨٦٦ - ١٩٣٨) الذي تلقى دراسته الفلسفية على فرانز برنتانو Franz Brentano في فينا ... وكان اهتمام تفاردوفسكي في الفلسفة منصباً على تحليل المعاني. فكان يمرن تلامذته على التفكير الواضح، ولكنه لم يدعهم ينسون أن تحليل المعاني ليس غاية في ذاته وإنما هو مدخل إلى الفلسفة.

ونحن نجد أيضاً صفتي الدقة والاحكام اللتين تستلزمها هذه الطريقة في أول بحوث لوكاشيفتش الهامة وهو البحث المرسوم « في مبدأ التناقض عند أرسطو »، نشر هذا البحث بالبولندية سنة ١٩١٠ ... وفي هذا الكتاب يبين لوكاشيفتش أن عند أرسطو ثلاث صيغ مختلفة لمبدأ التناقض، الصيغة الأولى أنطولوجية أو وجودية. والثانية منطقية والثالثة سيكولوجية... ويتأدى لوكاشيفتش من النظر في الصيغة الأنطولوجية للمبدأ إلى مناقشة مسألة المخالفات التي كان اكتشافها بمثابة صدمة للمشتغلين بالفلسفة والرياضيات في ذلك الوقت...

ولا شك في أن لوكاشيفتش قد استوحى تصوره للمنطق الثلاثي القيم من معالجة أرسطو للحوادث الممكنة المستقبلة في كتاب « العبارة »، وأما الاعتبارات الصورية كتلك التي أدت بالمنطقي ا. ل. بوست E.L.Post بعد ذلك بأربع سنوات إلى نتائج مشابهة، فلم يكن لها إلا دور ثانوي في تفكير لوكاشيفتش. وكان لوكاشيفتش يرمي من إنشاء نسق منطقي ثلاثي القيم الى صياغة نظرية تحوي القوانين التقليدية في المنطق الموجه « وقد حاول أيضاً بانشاء ذلك النسق أن يتغلب على مذهب الحتمية الفلسفي، وهو مذهب كان يعتقد أنه لازم عند التسليم بمبدأ ثنائية القيم ولكنه عدل فيما بعد عن اعتقاده ذاك » فلم يعد يرى تمانعاً بين انتفاء الحتمية والمنطق الثنائي القيم. وبعد إنشاء النسق المنطقي الثلاثي القيم صار من الواضح أنه يمكن إنشاء نسق رباعي القيم أو خماسي القيم أو نسق عدد القيم فيه أي عدد تشاء، بل نسق يحوي ما لا نهاية له من القيم.

راجع نظرية القياس الارسطية « ترجمة عبدالحميد صبره» المقدمة من ص ٤٠ - ص ٥١.

المنطق، فقد تابعها عن كثب وحاول ما وسعه الجهد أن يقدم الحساب المنطقي المتكامل لما نسميه الآن «المنطق متعدد القيم» «many - valued logic» وفي تحليل لوكاشيفيتش للموجهات نلتقي بالأفكار الابتدائية الآتية:[1]

١ ـ p قضية ويرمز لها بالرمز p

٢ ـ p قضية كاذبة ويرمز لها بالرمز Np أي (non - p)

٣ ـ p قضية ممكنة ويرمز لها بالرمز Mp (ويلاحظ أن الحرف M في رمزية لوكاشيفتش مأخوذ من الكلمة الألمانية Moglich التي تعني (possible).

٤ ـ p ليست ممكنة ويرمز لها بالرمز NMp

٥ ـ («non - p» ممكنة) ويرمز لها بالرمز MNp

٦ ـ («non - p» ليست ممكنة) ويرمز لها بالرمز NMNp

كذلك فإن لوكاشيفتش يحاول أن يحدد التضمن بدقة، ويستخدم الرمز C الذي يشير إلى التضمن ليميز فكرته عن فكرة رسّل وفكرة لويس أيضاً. فالعبارة «p implies q» التي نلتقي بها في منطق رسّل تكتب في رمزية لوكاشيفتش بالصورة:

C p q

وتعني إذا كانت p صادقة إذن q صادقة أيضاً

C p q: "If p then q"

---

(١) آثرت أن أقدم الرمزية التي يستخدمها لوكاشيفتش في منطقه كما هي لأن تعريبها كما هو معروض في ترجمة عبد الحميد صبره يؤدي بالقارىء إلى الوقوع في خطأ تكرار بعض الحروف المستخدمة.

ويطلق لوكاشيفتش على الرموز M،N،C في رمزيته مصطلح روابط «Functors».

والواقع أن لوكاشيفتش استطاع أن يستمد أفكاره الجديدة من بعض القضايا الهامة التي عثر عليها في المنطق الكلاسيكي وهي:

القضية الأولى تكون النتيجة صحيحة حينما ننتقل من الوجود الضروري إلى الوجود.

القضية الثانية تكون النتيجة صحيحة حينما ننتقل من الوجود إلى الوجود الممكن.

القضية الثالثة من المستحيل إلى اللاوجود فإن النتيجة صحيحة (إذا كانت p ليست ممكنة إذن non - p).

القضية الرابعة إذا وجد شيء ما فان وجوده يكون ضرورياً (وهذه القضية وجدها كوكاشيفتش عند ليبنتز الذي أكتشف أنه أخذها عن أرسطو من كتابه De Interpretatione.

القضية الخامسة إذا افترضت non - p إذن p ليست ممكنة.

القضية السادسة بالنسبة لأي قضية p فإنه إما p أو non - p ممكنة.

لقد أشار لوكاشيفتش إلى القضيتين الموجهتين الأوليتين بالصورة الرمزية الآتية

1. C N Mp Np «NMp implies Np

2. C N p N M p «N p implies N Mp

وحتى يمكن اشتقاق قضايا أخرى من الصياغات فإن لوكاشيفتش يستخدم مثل رسّل قاعدتين للاستنباط هما: (١) قاعدة التعويض

Substitution و (٢) إثباتِ التالي Modus ponens ويطلق عليهما معاً قاعدة الفصل detachment . كذلك نحن نجد أن لوكاشيفتش يطلق على القضية الصادقة المصطلح مقررة 'thesis' ، وهو يقبل أربعة قضايا أخرى صادقة بخلاف القضيتين السابقتين، وبذا يصبح مجموع القضايا الصادقة في نسقه ٦ قضايا ، وهذه القضايا تعد بمثابة المقررات [١] theses الأساسية لنسقه، وهي كما يلي:

المقررات

١ ـ CNMPNP

٢ ـ CNpNMp

٣ ـ CCNqNpCpq

٤ ـ CCNpqCNqp

٥ ـ CCpNqCqNp

٦ ـ CCpqCCqrCpr

وفي هذه المقررات نلاحظ أن ١ ،٢ هما القضيتان ١ ،٢ السابقتان، وأن المقررات ٣ ، ٤ ، ٥ هي صور مختلفة لمبدأ النقل Principle of transpoition أما المقررة السادسة فهي تمثل القياس الشرطي hypothetical Syllogisan .

---

(١) الترجمة مقرر theais مأخوذة عن عبدالحميد صبره، فيقول ، وكل قضية من قضايا النسق أو النظرية فنحن نقرر صدقها ، أما المسلمات فنقرر صدقها على سبيل التسليم، وأما المبرهنات فنقرر صدقها باعتبارها لازمة عن المسلمات، لذلك يطلق على كل قضية صادقة في النظرية أو النسق كله كلمة مقررة thesis ، والمقررات إذن تشمل المسلمات والمبرهنات فكل المسلمات والمبرهنات مقررات، لكن المقررات بعضها مسلمات وبعضها الآخر مبرهنات ».

راجع مقدمة عبدالحميد صبره لنظرية القياس الارسطية ، ص ٢٦ ـ ٢٧ .

ولكن كيف يمكن إجراء البرهنة عند لوكاشيفتش؟

خذ المثال الآتي عن كيفية البرهنة

3 p / Mp × C 1 - 7

يعني هذا المثال أنه في المقررة ٣ نرفع p ونضع بدلا منها Mp، فنحصل على التضمن، وأن المقررة (١) تتضمن المقررة (٧)، وما دامت المقررة (١) صادقة فإن المقررة (٧) يمكن الحصول عليها وفقاً لمبدأ إثبات التالي.
وإذا تقدمنا بمثل هذه الطريقة أمكن أن نحصل على المقررات الآتية:

٧ – CpMp

٨ – CNpMNP

٩ – CNMNpp

١٠ – CNMNpMp

١١ – CNMpMNP

١٢ – CMPP

١٣ – NPNP

١٤ – NMNP

١٥ – MPNMNP

١٦ – CMNPNMP

لكنا نلاحظ أن المقررات السابقة تنطوي على بعض النتائج المخالفية، مثال ذلك المقررة ٧، المقررة ١٢.

٧ – CpMp (p تتضمن إمكانية p)

١٢ – CMpp (إمكانية p تتضمن p)

وهذان التضمنان يعنيان أنه في المنطق الثنائي القيم فإن التعبيرين Mp، p متكافئان، ووفقاً لهذا فإن.

'to be possible' Mp

تكافيء

'to be true' p

والأبعد من هذا أن يان لوكاشيفتش يجد بعض النتائج المخالفية الأخرى حينما يحلل النتائج التي يحصل عليها من القضية الموجهة الثالثة. وحتى يعبر عن هـذا فـإنـه يلجـأ إلى استخـدام السـور الذي يشير إلى التبعيض Particularization $\sum$ والسور الذي يشير إلى التعميم Generalization Π (والرمزان أخذهما لوكاشيفتش من تشارلز بيرس المنطقي الأمريكي).

'$\sum$ p' = 'For a certain p'

'Π p' = 'For all P'

ومن ثم فالقضية الثالثة يمكن التعبير عنها فقط باستخدام هذه الأسوار. ولكن لوكاشيفتش يضيف رمزاً آخراً لعلامة الوصل Conjunction وهو الرمز K.

'Kpq' = 'p and q'

وبهذه الصورة يمكن كتابة المقررة الثالثة في صورة رمزية كما يلي:

١٧ ـ $\sum$ pKMpMNP.

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي:

« بالنسبة لقضية معينة p، إما p أو non-p ممكنتان »

وباستخدام سور التعميم Π في المقررة ١٧ فإنها تصبح:

١٨ - NIIpNKMPMNP

وتقرأ كما يلي:

« ليس من الصادق أنه بالنسبة لأي قضية p أن يكون كاذباً أن p ممكنة وتكون non-p بدورها ممكنة ».

وبتطبيق قواعد الاستنباط السابقة فإن لوكاشيفتش يؤسس المقررات الآتية بالتتابع:

١٩ - C K M p M N p M q

٢٠ - C C p q.C N q N p « نقل التضمن ».

٢١ - C N M q k M p M N p

٢٢ - C N M q Π p N K M p N p

٢٣ - M p.

ونحن نلاحظ أن المقررة (٢٣) تعني أن « p ممكنة » على اعتبار أن p أي قضية اختيرت بصورة عشوائية. وهكذا فإننا إذا بدأنا من القضية الثالثة فإننا نتوصل إلى النتيجة القائلة بأن « كل شيء ممكن » وأن لا شيء مستحيل، وبالتالي فإنه لا شيء ضروري. وما هو أبعد من هذا أنه إذا اتحدت المقررة (١٢) مع المقررة (٢٣) فسوف تنتج لدينا مقررة جديدة هي (٢٤)، حيث:

١٢ - C M p p.

٢٣ - M p

٢٤ - p

وهذه المقررة الأخيرة تعنى أن أي قضية p هي صادقة.

لوكاشيفتش والمنطق ثلاثي القيم

لقد سبق ان أشرنا ، ونحن بصدد الحديث عن بدايات منطق الموجهات، أن المنطق التقليدي ثنائي القيم، أي أنه ينسب للقضية قيمة صدق وقيمة كذب فقط. وقد نشأ هذا الوضع من طبيعة مبدأ الثالث المرفوع ذاته، الذي يقرر أن القضية إما صادقة أو كاذبة، وهذا المبدأ يعتبر أساسي للمنطق الكلاسيكي بأسره، ولكن هناك قضايا أخرى مثل، من الممكن أن أكون في القاهرة يوم ٣٠ يناير. أمثال هذه القضية لا يمكن القول بأنها ضرورية أو صادقة أو كاذبة، في الوقت الذي تم تقريرها فيه (لأن هذه القضايا عند أرسطو تدخل في باب المستقبل الحادث). ولذلك فإن لوكاشيفتش يقدم قيمة ثالثة لمثل هذه القضية وهي القيمة ممكن 'Possible' وبناء على هذه الفكرة فإننا إذا رمزنا للمصطلح صادق بالرمز 1 وللمصطلح كاذب بالرمز 0، فإن لوكاشيفتش يعطي القيمة 1/2 للمصطلح ممكن. كذلك فهو يرمز للسلب Nagation (الرابط functor) بالرمز N، ويضع القائمة الآتية التي توضح قيم القضية ونفيها.

p	0	1/2	1
N p	1	1/2	0

الواضح من هذه القائمة أن الاختلاف الوحيد بين هذا المنطق والمنطق ثنائي القيم هو أن Np, Mp يمكن أن تأخذ القيمة 1/2. والقيم الأخرى هي قيم متناظرة تماماً كما في المنطق ثنائي القيم.

أما في حالة التضمن C فإنه يمكن تأسيس القائمة بصورة مماثلة لكي تناظر القيم الثنائية على النحو التالي:

C	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

لقد حاول لوكاشيفتش[1] أن يعثر على تعريف دقيق لتصور الإمكانية قبل عام ١٩٢٠، ولكن ألفرد تارسكي وهو من أبرع تلامذته أمكنه أن يقدم مثل هذا التعريف عام ١٩٢٠ حيث يعرف الإمكانية:

$$D_2 \qquad M\,p = C\,N\,p\,p$$

أي أن «p ممكنة» تعرف «إذن non-p إذن p».

والتعبير 'CN pp' الذي يحدد إمكانية قضية ما p يكون كاذباً فقط عندما تكون p ذاتها كاذبة، وفي كل الحالات الأخرى فإن هذا التعبير صادق. ووفقاً لهذا فإن.

$$M_0 = 0 \quad , \quad M\,1/2 = 1 \quad , \quad M_1 = 1$$

وعلينا أن نلاحظ أنه في الحساب ثنائي القيم فإن التعبير 'CNpp' مكافىء لـ 'p'، ولكن هذا لا ينطبق في حالة الحساب ثلاثي القيم Three -

---

(١) نلاحظ أن لوكاشيفتش في بداية أبحاثه تبنى تعريف الإمكانية البحتة وفقاً للصيغة:

D_1 M p = A Ep Np Πq NCp kpNq

حيث الرابط A يعني الفصل المنطقي، بينما E تشير إلى التكافؤ المنطقي. ويمكن قراءة الصيغة كما يلي:

p ممكنة، تعني إمام أو non-p متكافئتان أو أنه لا يوجد أي زوج من القضايا المتناقضة من p. ولكن لوكاشيفتش امتنع عن استخدام هذا التعريف بعد أن قام تارسكي تعريفه.

valued Calculus (حيث توجد ثلاث قيم هي 0 ،١، 1, 2 /) حيثما تكون الحالة $M\ 1/2 = 1$. وعلى هذا فإن المقررة ثنائية القيم 'CCNppp' ليست صحيحة في الحساب ثلاثي القيم إذا كانت قيمته p هي 1/2 .

كذلك فإن لوكاشيفتش يعرف الضرورة كما يلي:

$$N\ M\ Np = N\ Cp\ Np \qquad D_1$$

أي أن:

« 'p ضرورية' ، تعني ' أنه ليس من الصادق أن p اذن non-p' » .

وعلى أساس تصور الإمكانية الذي قدمه لوكاشيفتش فإن قضايا الموجهات السابق وصفها هي قضايا صادقة ومتسقة. وحتى نبرهن على أن صيغة معينة هي تحصيل حاصل (مقررة) فإن لوكاشيفتش يستخدم طريقة القائمة بالإضافة إلى التعويض وقاعدة إثبات التالي. على سبيل المثال لكي نبرهن على الصيغة Cp Mp ، إذا p صادقة إذن p ممكنة ، نصمم القائمة ونضع في اعتبارنا القيم المتناظرة للتضمن والإمكانية.

p	Mp	CpMp
0	0	1
1/2	1	1
1	1	1

الصيغة CpMp هي تحصيل حاصل لأنها دائماً تأخذ القيمة 1 .

بناء على كل هذه الأفكار فإنه يمكن لنا أن نعرض النسق الذي يقدمه لوكاشيفتش للمنطق ثلاثي القيمة بصورة متسقة بحيث نقف على أهم مبانه وأفكاره الأساسية.

التركيب الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم.

يتألف البناء الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم عند لوكاشيفتش من أربعة أجزاء أساسية هي:

أولاً: الأفكار الابتدائية.

١ ـ المتغيرات القضائية p, q, r, ... وكل منها يأخذ ثلاث قيم هي صادق، كاذب، ممكن {M, F, T} وهذه القيم عدديا هي 1، 0، 1/2 على التوالي.

٢ ـ رابط التضمن Functor of Implication ويرمز له بالرمز C.

٣ ـ تصور الإمكانية ويعرف كما يلي:

D_1 $$MP = CNPP$$

ثانياً: الأفكار المعرفة Defined Ideas.

توجد روابط أخرى تعرف كما يلي:

١ ـ الفصل المنطقي ويرمز له بالرمز A ويعرف كما يلي:

D_4 $$Apq = CCpqq$$

ب ـ الوصل المنطقي ويرمز له بالرمز K ويعرف كما يلي:

D_5 $$Kpq = NANpNq$$

حـ ـ التكافؤ المنطقي E ويعرف كما يلي:

$D_{.}$ $$Epq = KCpqCqp$$

ثالثاً: البديهيات

توجد لدينا في النسق أربع بديهيات أساسية هي:

١ - CqCpq

٢ - CCpqCCq Cpr

٣ - CCCpNppp

٤ - CCNqNpCpq

وقوائم الصدق الخاصة بهذه البديهيات تبين أن هذه البديهيات صادقة أو تحصيل حاصل إذا أخذت المتغيرات القيم 0، 1. على التوالي.

الفصل الثالث

هلبرت والصورية البحتة

حاول دافيد هلبرت تأصيل الصورية في المنطق الرياضي من خلال كتاباته [1] التي دونها ، وأراد مثل فريجه ورسّل أن يؤسس ويدعم أسس الرياضيات Foundations of Mathematics عن طريق المنطق الرياضي ،

---

(١) من أهم كتابات هلبرت ما يلي :

- Mathematische Probleme (Mathematical problems, congress of Mathematics, Paris, 1900).
- .Ubre die Grundlagen der logik und der Arithmetik, On the Foundations of logic and Arithmatic, International Congress of Mathematics, Heidelberg, 1904).
- Axiomatische Deuken (Axiomatic thinking, Mathematische Annalen, 1918).
- Die Grundlagen der Mathematik, Hamburg, 1928.
- Beweis des Tertium non datur (The demonstration of Excluded Middle, Gottingen, 1931).
- Naturerkennen und logik (Knowledge of Nature and logic, Gottingen, 1931).

وكتب مع أكرمان Ackermann مؤلفا بالألمانية بعنوان Grundzuge der theoretische logik ترجم إلى اللغة الإنجليزية عام ١٩٥٠ بعنوان Principles of Mathematical logic كما صدر له بالاشتراك مع برنيز Bernays كتاب (أسس الرياضيات) Grundlagen der Mathematik الجزء الأول منه صدر عام ١٩٣٤ وصدر الجزء الثاني عام ١٩٣٨ . ومن أهم مؤلفات هلبرت الأخرى (أسس الهندسة) Grundlagen der Geometrie الذي صدر عام ١٨٩٩ ، وترجم إلى الإنجليزية عام ١٩٠٢ بعنوان The Foundations of Geometry كما ترجم إلى اللغة الفرنسية أيضاً .

وهو ما أسماه المنطق النظري Theoretical logic أو الرياضي أحياناً.

ونقطة البدء عند هلبرت كما يلي: ليس مقصوداً بالمنطق أن يدرس موضوعات معينة، تماماً كما تفعل أي نظرية رياضية، ولكن المقصود به أن يدرس القضايا التي يمكن تدوينها عن هذه الموضوعات. وبكلمات أخرى فإن اللغة التي نستخدمها في النظرية الرياضية شيئاً قائماً بذاته، واللغة التي نستخدمها حين نتكلم عن هذه النظرية شيء آخر.

معنى هذا أن هلبرت ينظر للغة الرياضة كشيء مستقل ويردها إلى عناصرها حتى يمكن دراستها كلغة رياضية في حد ذاتها. وهذه الفكرة هي ما يطلق عليه هلبرت مصطلح، ما وراء الرياضيات، Meta-mathematics، وأحياناً، ما وراء المنطق، Metalogic. من أجل هذا الهدف شعر هلبرت بالحاجة إلى لغة دقيقة هي لغة المنطق الرياضي التي وجدها بصورة سلسة في برنكيبيا، وكل ما كان ينبغي عليه أن يفعله يتمثل في تبسيط هذه اللغة بصورة أكثر وتوسيعها لتفي بأغراض البرنامج الذي يدعو إليه. ووفقاً لهذا فإن على المنطقي في نظره أن يؤلّف بين الرموز البحتة، وأن يضع هذه التأليفات تحت منظار الاستدلال دون أن يفكر فيما تعنيه، ودون أن يضفي الفكر عليها. وهنا فإن هلبرت ينظر للمنطق على أنه منطق قواعد Rules معينة، أو هو منطق علاقات، أو كما قال هو ذاته إن للرموز ناحيتين هما؛ (١) أنها تستخدم في القواعد الصورية Formal Rules، (٢) أنها بلا معنى ولها القدرة على الحركة.

ويرى هلبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماماً، وأن الرياضيات متحررة تماماً من أي افتراضات قبلية. وحتى يمكن أن نؤسس الرياضيات فإننا لسنا بحاجة إلى معونة إلهية على ما يرى كرونكر [1]

(١) كرونكر من دعاة المذهب الحدسي في أسس الرياضيات، وهو معاصر لفيرشتراس =

Kronecker ، أو أي افتراض لذكاء إنساني خاص كما يدعي هنري بوانكاريه Poincaré ، أو أي حدس أوليّ كما يدعي بروور Brouwer ، أو حتى بديهيات قابلة للرد كما يرى رسّل وهوايتهد. إن هلبرت يعتقد في إمكانية إنجاز أسس الرياضيات بدون كل هذه الفروض إذا نظرنا للرياضة البحتة من وجهة نظر صورية خالصة، والطريقة الوحيدة التي يمكن بواسطتها إنجاز هذا العمل هي الطريقة الاكسيوماتيكية التي اتضحت في أبحاث هلبرت منذ حوالي عام

Weierstrass وكان زميلاً له في جامعة برلين. وآراء كرونكر يمكن إيجازها فيما يلي:

١ ـ أن كرونكر يعترض على التحمس الزائد لدى بعض الرياضيين لتأسيس الرياضيات على أساس بعض المفاهيم مثل المجموعة المتناهية Finite set والأعداد الحقيقية Real Numbers بناء على فكرة اللامتناهي Infinite . ومع أنه يرى أن مدخل التحسيب Arithemetization هو المدخل الصحيح للتحليل والرياضيات، إلا أن أفكاره الأساسية فيما يتصل بالتحسيب تستبعد استخدام المجموعات اللامتناهية من التعريفات والأعداد، وفي هذا نجده يقول « لقد خلق الله الأعداد الصحيحة، ولكن ما عدا ذلك فهو من صميم عمل الإنسان ».

راجع في ذلك:

Bell, E.T., The Queen of the Sciences, Batimore, Williams and Wilkins, 1931, p. 34.

ب ـ يقرر كرونكر أن الأعداد الطبيعية والعمليات التي تقوم بينها إنما يمكن تأسيسها حدسيا، وأن الأعداد الجبرية والعمليات التي تقوم بينها يمكن تأسيسها من خلال الأعداد الطبيعية وعملياتها، لكن الأعداد الحقيقية ليست قابلة لمثل هذا التأسيس، ولهذا السبب نجده ينكر نظرية كانتور Cantor باعتبارها ليست نوعاً من الرياضيات وإنما هي فقط صورة من صور التصوف Mysticism . راجع في ذلك:

Struik, D.J., A Concise History of Mathematics, 2 Vols. New York, Dover Pub. 1948, p. 243.

جـ ـ كل التعريفات والبراهين في العلم الرياضي يجب أن تكون تركيبية Constructive .

د ـ أن الأحكام ذات الطبيعة المنطقية البحتة لا تفضي ضرورة الى نظريات رياضية مشروعة.

١٩٠٠ ، وهي تضع ذلك التمييز الدقيق بين التصورات الابتدائية المسموح بها بدون أي تعريفات، وبين التصورات المشتقة عن طريق التعريفات، أي بين البديهيات والبرهنات، وهي أيضاً طريقة تؤسس قواعد الاستنباط في نظره [٢].

أما الطريقة الإكسيوماتيكية التي يدعو إليها هلبرت فهي جهاز من الرموز، لا شيء فيه يوجد بصورة عرضية، وإنما كل شيء يسير وفق القواعد الصورية الدقيقة. واختيار البديهيات Choice of Axioms في هذه الطريقة يخضع لثلاث اعتبارات أساسية هي:

أولا: أن البديهيات يجب أن تكون مستقلة Independent ، أو بمعنى آخر لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى، لأنه في هذه الحالة سيزداد عدد البديهيات ويتطلب الأمر اختزالها إلى أقل عدد ممكن.

ثانيا: لا بد أن يكون عدد البديهيات كافياً بحيث يسمح باستنباط المبرهنات Theorems من النظرية التي لدينا.

ثالثا: يتعين أن تكون البديهيات غير متناقضة، وهذا الشرط يعد من أهم الشروط على الإطلاق في أي نسق بديهي Axiomatized system ، وهو أيضاً أصعب الشروط.

إلا أنه يمكننا أن ننظر إلى الشرط الثالث على أنه الخاصية التي ينبغي أن يتسم بها أي نسق استنباطي أو إكسيوماتيكي على الإطلاق، على حين أن

(٢) راجع في ذلك:

a - Henkin, L., Suppes, P., and Tarski, A., The Axiomatic Method, Amesterdam, North-Holland pub. Co., 1959.

b - Helmer, O., On The Theory of axiom-system, Analysis, vol. 3, 1935, pp. 1-11.

الشرط الأول وكذلك الشرط الثاني، عادة ما تنظر إليهما على أنهما بمثابة شروط اقتصادية Economical بالنسبة للنسق.

ويترتب على هذه الشروط الثلاثة، ظهور مشكلات ثلاث أساسية تواجه أي نسق إكسيوماتيكي وهذه المشكلات هي:

١ ـ أن على النسق الإكسيوماتيكي أن يبرهن على عدم تناقض بديهياته.

٢ ـ كذلك لا بد وأن يكشف لنا النسق عن استقلال البديهيات.

٣ ـ وأن يبرهن على تمام Completeness البديهيات.

وانطلاقا من الحقيقة القائلة بأن الرياضيات تحوي تصورات منطقية بحتة، وأن المنطق يحتوي على تصورات رياضية (مثل فكرة العدد) فإنه لا يمكن تشييد المنطق بمعزل عن الرياضيات، كما أن الرياضيات لا يمكن أن تنفصل عن المنطق، لذا كان من الضروري أن يتم تأسيس المنطق والرياضيات، منذ البداية، في طريقة هلبرت بالتوازي معاً، وهذا ما افترضه هلبرت، ويمكن تلخيص طريقة هلبرت الإكسيوماتيكية التي اتبعتها المدرسة الصورية من بعده على النحو التالي:

(١) أن الرموز الأساسية في المنطق والرياضيات يمكن حصرها في رمزين هما:

أ ـ رمز السلب Negation ويرمز له هلبرت بالرمز —

ب ـ رمز التضمن Implication ويرمز له هلبرت بالرمز →.

(٢) أن كل التأليفات التي نتوصل إليها من الرموز التي نضعها في اعتبارنا، ولها معنى في الرياضيات الكلاسيكية، يمكن تمييزها بدقة حين نطلق عليها المصطلح «صيغ» Formulae: والصيغة يكون لها معنى فحسب في

حالتين: حينا تكون صادقة صدقاً مطلقاً، وحينا تكون كاذبة كذباً مطلقاً ويمكن أن نمثل لحالتي الصدق والكذب بمثال من الرياضيات المألوفة. إذا قلت ١ + ١ = ٢، هذه صيغة ذات معنى لأنها صادقة، وكذلك الصيغة ١ + ١ = ١ صيغة لها معنى أيضاً لأنها كاذبة، أما الصيغ التي ليست ذات معنى مثل 1 = ← + 1 فهي لا تمثل شيئاً، ومن ثم لا يمكن القول بأنها صادقة أو كاذبة.

(٣) أن الإجراء الذي نقوم به ويسمح بنجاح هذه الصيغ، ويناظر الصيغ المبرهنة في الرياضيات الكلاسيكية، هو ما نسميه البرهان.

(٤) أن الصيغ التي تناظر اثباتات الرياضيات الكلاسيكية والتي يمكن تحقيقها في حدود المتناهي يمكن البرهنة عليها، أي يمكن تأسيسها - وفقط عندما يكون الحساب الفعلي للإثبات الرياضية المناظرة ينتج من صدق الصيغ الملائمة.

والواقع أن البرنامج الذي اقترحه هلبرت على النحو السابق يتضح منه أن النقاط الثلاث الأولى ترجع إلى رسّل ومدرسته. أما النقطة الرابعة والتي تعني أنه من الممكن إبدال الرموز المنطقية برموز أخرى حسابية (عن طريق الأعداد الطبيعية) تفضي بنا إلى قضايا حسابية Arithmetical Proposition (ذات أعداد طبيعية) صادقة، ومن ثم فإنه إذا كانت قضية رمزية يمكن أن ترد إلى 2 = 1، فإن هذا لا يمكن البرهنة عليه بذات الطريقة في ظل وجود النقطة الثالثة، وهذا يعني أنها غير قابلة للبرهان من خلال النسق وإطاره العام، أي البرهنة على عدم تناقض هذا النسق، لأن الأمر الهام بالنسبة لهلبرت هو عدم التناقض.

ولكن يمكن لنا أن نقوم بإجراء بعض التصحيحات للنقطة الثالثة بالذات عند هلبرت على الصورة التالية:

(٣ أ) بعض الصيغ المعينة تسمى بديهيات.

(٣ ب) إذا كانت a ,b. صيغتين (صادقتين أو كاذبتين) وكان فيما يتعلق بالقضية a أن a→ أمكن البرهنة عليها، إذن فإن b أيضاً قابلة للبرهان (قاعدة إثبات التالي) ولكن لتقرير ما إذا كان من الممكن البرهنة على صيغة معطاة لدينا، مهما كانت هذه الصيغة - بطريقة عامة ومحدودة- فإن هذه مشكلة أكثر تعقيداً، وهي في حد ذاتها تؤلف موضوع ما نسميه «مشكلة القرار» Problem of decision. أضف إلى هذا أنه توجد البديهيات التي نجد لها تطبيقا في الرياضيات الكلاسيكية، وبطبيعة الحال يوجد عدد لا نهائي من هذه الصيغ، وكل صيغة يمكن أخذها كبديهية. كذلك فنحن إذا اعتبرنا أن كل رمز يمكن استبداله بعدد، فإنه ينتج عن ذلك أن هذه الصيغ يمكن تمثيلها بالتعبيرات ١ = ١، ٢ = ٢، ٣ = ٣،... وهي تحصيلات حاصل، كما يرى فتجنشتين، ويمكن الحصول عليها بالتعويض من عدد محدود من الصيغ.

كذلك فإن مشكلة التناقض داخل النسق الرياضي الذي أراد هلبرت تأسيسه يمكن أن ترد إلى المشكلة الآتية: إذا كان لدينا النسق الرياضي S وهو نسق متناقض، فإنه سوف يتضمن برهاناً على الصيغة ١ = ٢، وهذا البرهان سوف يفضي إلى مجموعة متناهية من البديهيات، التي يمكن أن نشير إليها بالرمز M_0 وهذا سوف يعني بالضرورة أن المجموعة M_0 متناقضة، ومن ثم فإن مشكلة عدم التناقض الخاصة بالنسق ترد إلى مشكلة عدم تناقض بديهياته.

نظرية حساب القضايا في نسق هلبرت

تبدأ نظرية حساب القضايا عند هلبرت - وفق مذهبه الإكسيوماتيكي- متخذة مسار البرنكيبيا ولكن بإجراء بعض التعديلات الطفيفة على نسق البرنكيبيا كما يلي:

الأفكار الابتدائية Primitive Ideas

١ ـ X, Y, Z، ... متغيرات قضائية Propositional Variables يمكن أن تأخذ قيمتين (صادق، كاذب)

٢ ـ الفصل: ويرمز له بالرمز v

٣ ـ الوصل: ويرمز له بالرمز &

٤ ـ التضمن: ويرمز له بالرمز →.

٥ ـ التكافؤ: ويرمز له بالرمز ~

٦ ـ السلب: ويرمز له بالرمز —

٧ ـ أنه إذا كانت X قضية فإن $\bar{X}$ نفيها.

البديهيات

يضع نسق هلبرت البديهيات الأربع التالية والتي تعد بمثابة قضايا صادقة أو هي تحصيل حاصل وهي:

a - $X \vee X \rightarrow X$

b - $X \rightarrow X \vee X$

c - $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$

d - $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$

قواعد الاستنباط

وتنحصر في:

أ ـ قاعدة التعويض

ب ـ قاعدة الاستنباط (إثبات التالي)

ويمكن البرهنة على النظريات باستخدام الأفكار الابتدائية والقضايا الصادقة (البديهيات) عن طريق تطبيق قواعد الاستنباط. وهنا فإنه يتعين علينا أن نناقش هلبرت في نسقه.

أولا: أن نظرية هلبرت تبدأ من الأفكار الابتدائية وهي ذاتها الأفكار التي تبدأ منها نظرية رسّل، فيما عدا الرموز التي استحدثها للمتغيرات، فقد وضع هلبرت الرموز X، Y، ... بدلا من p، q، ...، وكذلك رمز للوصل والتضمن والتكافؤ برموز جديدة، ورمز لنفي القضية بعلامة (ـ) فوق المتغير ذاته.

ثانيا: أن البديهيات التي حددها هلبرت تستخدم التضمن والفصل على حين أن بديهيات رسّل تستخدم فكرة السلب بالإضافة إلى التضمن والفصل.

ثالثا: أن القواعد الأساسية للاستنباط كما هي. لقد عدل هلبرت في شكل الرمزية، لكن لم يتمكن من إجراء تعديل على فكرة التضمن التي أودعها رسّل وهوايتهد البرنكيبيا، وبذا فإن فكرة التضمن تظل كما هي الفكرة المحورية حتى في نسق هلبرت. لقد انصب التعديل إذن على الرمزية ولم يتجاوزها إلى النسق.

الفصل الرابع

كواين وحركة تصحيح المفاهيم

لم تكن حركة تصحيح مفاهيم المنطق الرياضي في تقدمها أقل من محاولات ابتكار أنساق منطقية على غرار نسق برنكيبيا ؛ ولذا وجدنا قلة من المناطقة يتجهون هذا الاتجاه، ومن بينهم، بل من أهمهم على الإطلاق كواين [1] W.V.Quine الذي حاول أن يصحح المفاهيم المنطقية والرياضية من خلال تتبع تاريخي دقيق للأفكار، وكيفية استخدامها في الأنساق المختلفة. ومن ثم فإنه يتعين علينا أن نقف على مجهودات كواين في هذا المضمار.

لقد خصص كواين كتابه « مناهج المنطق » لبحث موضوعات شتى تتعلق بالمنطق الرياضي، ومن أهم الموضوعات التي تناولها في القسم الأول دالات الصدق؛ حيث عرض لهذه الدالات كما هي مستخدمة في المنطق الرياضي، خاصة نسق البرنكيبيا، وحاول أن يقدم من خلال هذا الاستعراض فكرته الدقيقة عن الدالات باعتبارها من المفاهيم الرئيسية.

---

(١) من أهم كتابات كواين:

- Mathematical logic, New york, 1940
- Elementary logic, Boston, 1941
- From a logical Point of view, Harvard, 1953
- Selected logical Papers, New york, 1966
- Methods of logic, London 1 st ed, 1950. Third ed. 1974.

وأول الدالات التي يتناولها كواين بالتصحيح دالة السلب. لقد اتضح له أن علامة السلب المستخدمة في برنكيبيا ماتيماتيكا وهي العلامة (~) لا تصلح للتطبيق إذا كانت لدينا متغيرات كثيرة في الدالة وأردنا تطبيق السلب عليها، ولذا فإنه كما يقول[1] يفضل العلامة (ـ) التي استخدمها تشارلز بيرس في رمزيته. فإذا كان لدينا المتغير p مثلا وأردنا التعبير عن سلبه، فإننا نكتب المتغير في صورته الجديدة السالبة كما يلي ($\bar{p}$). وإذا أردنا أن نعبر عن سلب السلب بالنسبة لذات المتغير فإن ذلك يكون بكتابة المتغير على النحو ($\bar{\bar{p}}$)، وهذا هو سلب السلب الذي يكافيء المتغير p منطقياً.

ومن جانب آخر فان التعبير بطريقة كواين عن دالة الوصل يمكننا من اختصار الثوابت المستخدمة في برنكيبيا. فاذا كان لدينا المتغيرات p، q، r مثلا، فإنه يمكننا التعبير عن صدقها جيعاً في دالة وصل واحدة حين نضع المتغيرات وضعاً متجاوراً في الصيغة (pqr). ويستنتج كواين قانون صدق هذه الدالة كما يلي « تصدق الدالة فقط وفقط إذا صدقت جيع القضايا الموجودة في الدالة. وتكذب الدالة فقط وفقط إذ كانت قضية واحدة من هذه القضايا على الأقل كاذبة ».

ومن هذه الصورة يتوصل كواين إلى أن الوصل بين القضية ونفسها يكافيء القضية ذاتها أي أنه يمكننا اختصار الصيغة.

(pp)

وفقط إلى الصيغة

p

أما دالة الفصل فإن كواين يجد أنه من الأفضل معالجتها بصورة أدق مما عرضه نسق برنكيبيا، لأن الفصل يقع على الأقل في معنيين:

---

(١) Ibid, P. 14

١ ـ الفصل الاستبعادي exclusive disjunction وهو ذلك الذي يستبعد صدق القضيتين معاً إلى جانب استبعاده كذبهما معاً :

٢ ـ الفصل غير الاستبعادي non exclusive disjunction وهو الذي يقرر صدق القضيتين معاً، ولكنه يستبعد كذبهما معاً.

خذ المثال الآتي ليوضح ما يعنيه كواين بدالة الفصل «الجنود منتصرون أو الجيش متقدم»، لهذه القضية أربعة احتمالات وهي:

الحالة الاولى:	الجنود منتصرون	والجيش متقدم
الحالة الثانية:	الجنود ليسوا منتصرين	والجيش متقدم
الحالة الثالثة:	الجنود منتصرون	والجيش ليس متقدماً
الحالة الرابعة:	الجنود ليسوا منتصرين	والجيش ليس متقدماً

إنه وفقاً لرأي كواين فإننا استخدمنا الفصل بالمعنى الاستبعادي ونجد أن الدالة تكذب في الحالة الأولى «الجنود منتصرون والجيش متقدم» وفي الحالة الرابعة «الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً». كما أن الدالة تكون صادقة في الحالة الثانية «الجنود ليسوا منتصرين والجيش متقدم»، وفي الحالة الثالثة «الجنود منتصرين والجيش ليس متقدماً». أما إذا استخدمنا الفصل بالمعنى غير الاستبعادي فسوف نجد أن الحالة الرابعة وهي «الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً» هي الحالة الوحيدة التي تكذب فيها دالة الفصل، على حين أن الدالة وفقاً للتعريف السابق سوف تصدق في الحالات الثلاث الأولى.

لذلك فإن كواين يفضل استخدام دالة الفصل بالمعنى غير الاستبعادي، وهو نفس المعنى الذي استخدم في البرنكيبيا. فإذا كان لدينا المتغير p والمتغير q وأردنا أن نعبر عن الفصل الاستبعادي لهما، فإن ذلك يكون من خلال الصيغة:

$(p\bar{q} \vee \bar{p} q)$

على هذا الأساس فإن دالة الفصل تصدق إذا صدقت واحدة على الأقل من قضاياها .

ويضع كواين العلاقة بين الوصل والفصل والسلب بصورة محددة فنجده يميز بين بعض الصيغ التي تبدو متشابهة وهي:

1. $(\bar{p} q)$ and $-(pq)$

2. $(\bar{p} \vee q)$ and $-(p \vee q)$

3. $-(pq)$ and $(\bar{p} \bar{q})$

2. $-(p \vee q)$ and $(\bar{p} \vee \bar{q})$

فقد يبدو لنا في كثير من الأحيان أن هذه الصيغ متشابهة ، لكن واقع الأمر أن ثمة اختلافات بيّنة تبدو من وضع الصيغ ذاتها . على سبيل المثال نحن نجد أن الحالة الأولى التي تقرر تمييز الصيغ $(\bar{p} q)$ نجد أن p فقط هي التي سلبت ، على حين أن الحالة المقابلة $-(pq)$ تبين أن السلب يطبق على ما بداخل الأقواس ككل. كما ويتضح هذا الاختلاف من قراءة كل صيغة على حدة. فالصيغة $(\bar{p} q)$ تقرأ « ليست هي الحالة أن p وهي الحالة أن q » . أما الصيغة المقابلة فتقرأ « ليست هي الحالة أن كلا من p ، q ».

ويوضح كواين بناء على ما أشار إليه من معاني السلب والوصل والفصل أن القضية $\bar{p}$ تكون صادقة فقط إذا كانت p كاذبة ، وأن 'p q... s' تصدق فقط إذا كانت p،q،..s صادقة كل على حدة ، وأن 'pvqv....vs' تصدق إذا لم تكن p'q'....'s كاذبة جميعاً . وهذا يعني أن صدق أو كذب دالات السلب والوصل والفصل يتوقف على صدق أو كذب القضايا المكونة لها ، ومن ثم فهو يعرف الدالة على أنها أي « مركب من جمل إخبارية يتوقف صدقها في كل الحالات على قيم الصدق لأجزائها المكونة لها » ومن ثم تصبح دالة

صدق »[1]. وحتى يبين كواين أهمية هذا التعريف، فإنه يزودنا بمثال يكشف عن تعريفه بصورة دقيقة. فإذا كان لدينا المركب الإخباري « مات جونز لأنه تناول سمكاً بالآيس كريم ». في هذا المثال نجد لدينا الحالة « مات جونز »، والحالة « جونز تناول سمكاً بالآيس كريم »، فنحن هنا إذا سلمنا بالحالتين كل على حده أمكننا أن ننكر صدق القضية المركبة والمؤلفة لها حيث صدق المركب يتوقف على صدق الأجزاء المؤلفة للمركب. لكن إذا كانت لدينا الحالات:

(١) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم ومات. (وصل)
(٢) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم أو مات. (فصل)
(٣) لم يمت جونز. (نفي)

فإنه لا يمكن إنكار صدق أو كذب المركب ما دمنا قد عرفنا صدق أو كذب أجزاء المركب. وعلى هذا الأساس فإنه يمكن التعبير عن دالة الصدق truth – Function عن طريق استخدام قائمة تبين حالات الصدق والكذب المتعلقة بكل حالة من حالات صدق أو كذب المتغيرات التي تربط بينها الدالة.

والسؤال الذي يفرض نفسه الآن: هل تكفي دالة السلب والوصل والفصل وحدها لتأسيس دوال الصدق؟ إن كواين يرى ذلك، بل إنه يذهب إلى ما هو أبعد حين يقرر أن دالة السلب والوصل وحدهما تكفيان لهذا الغرض بدون الاستعانة بدالة الفصل، ويقدم لنا المثال الآتي:

(p excl - or q)

تكذب هذه الدالة في حالتين، وتصدق في حالتين:

---

(١) Quine, W.V., Methods of logic, p. 15.

١ - حالتي الكذب

- تكذب الدالة إذا كانت p صادقة، q صادقة.
- تكذب الدالة إذا كانت p كاذبة، q كاذبة.

٢ - حالتي الصدق

- تصدق الدالة إذا كانت p كاذبة، q صادقة.
- تصدق الدالة إذا كانت p صادقة، q كاذبة.

ومن ثم فانه يمكن التعبير عن الصيغة[١] (p excl - or q) بالصيغة:

$$-(pq)-(\bar{p}\ \bar{q})$$

التي تعبر عن الوصل بين (pq) - و ($\bar{p}\ \bar{q}$). ذلك لأن هذا الوصل ينكر (p q)، ($\bar{p}\ \bar{q}$). وعلى هذا الأساس يخلص كواين إلى النتيجة القائلة بأن (p excl - or q) تكون كاذبة في حالتين حينما تكون ($\bar{p}\ \bar{q}$) - (pq) - صادقة. وهنا تكون فكرة كواين صحيحة حيث الوصل والسلب وحدهما يكفيان، نظراً لأن دالة الفصل الاستبعادي تكون زائدة[٢].

كذلك يثبت كواين أن دالة الفصل غير الاستبعادي زائدة، وينطبق عليها ما ينطبق على الفصل الاستبعادي، حيث الصيغة (p v q) تكون كاذبة إذا كانت p ، q كاذبتين، ومن ثم فإنها تصدق إذا لم يكذبا معاً، أي حين نعبر عنها بالصيغة ($\bar{p}\ \bar{q}$) -.

ويحاول كواين أن يشرح فكرته بدقة من خلال مثال يفترض فيه بعض التعقيد. افترض دالة صدق للمتغيرات p ، q ، r. وهذه الدالة تصدق في خمس حالات، وتكذب في ثلاث حالات.

(١) Ibid, p. 16

(٢) Ibid, p. 16

حالات الصدق

1.	p False	q true	r true
2.	p true	q False	r true
3.	p true	q true	r False
4.	p False	q true	r False
5.	p False	q False	r False

حالات الكذب

1.	p true	q true	r true
2.	p False	q False	r true
3.	p true	q False	r False

والدالة في حالات الكذب الثلاثة الأخيرة يتم التعبير عنها كما يلي:

١ ـ $(p\ q\ r)$

٢ ـ $(\bar{p}\ \bar{q}\ r)$

٣ ـ $(p\ \bar{q}\ \bar{r})$

وحتى نعبر عن الدالة في وصل واحد، فإن سلب هذه الدالات الثلاث يتم في الوصل الآتي:

$$-(p\ q\ r)\ -(\bar{p}\ \bar{q}\ r)\ -(p\ \bar{q}\ \bar{r})$$

ويلاحظ أن هذا الإجراء يمكن تطبيقه على أي مركب حيث نقوم بعمل وصل لسلب كل الحالات التي تكذب فيها الدالة. ويوضح كواين أن الاستثناء الوحيد لهذا الاجراء يكمن في الصيغ التحليلية. فإذا كان لدينا مركب من القضايا p ، q ، r ، s، وهذا المركب على هيئة صيغة تحليلية، فإننا

نستطيع أن نعبر عن هذا المركب في صيغة وصل وسلب واحدة كما يلي:

- (p p̄ q r s)

حيث (p p̄) كاذبة دائماً.

من هنا يستنتج كواين أن السلب والوصل يكفيان وحدهما فقط للتعبير عن الدالات المنطقية. ولكن هذه الفكرة لا تستبعد بحال من الأحوال فكرة الفصل، لأن الوصل (pq) يمكن إحلال الفصل (p̄ v q̄) - بدلاً منه. ولما تنبه كواين إلى هذه الفكرة[٦] حاول أن يستخدم ثابت عدم الاتساق (/) الذي أشار إليه شيفر Sheffer عام ١٩١٣، حيث الصيغة (p / q) تصدق فقط إذا لم تكن q،p صادقتين معاً: ومن ثم فإن الصيغة (p / q) تكافيء الصيغة (pq) - . كما أن الصيغة (p̄) يمكن التعبير عنها بالصيغة البديلة (p/p) وتعني أن p ليست متسقة مع نفسها. وكذلك الصيغة (p q) يعبر عنها بالصيغة البديلة الآتية: (p/q) / (p/q).

يتضح لنا إذن أن ثمة تطوراً حدث في مفهوم السلب والوصل والفصل عند كمايمين، وقد استهسيم هذا تطورات أخرى حدثت في مجال مفهوم التضمن. وقد سبق أن أشرنا ونحن بصدد استعراض مجهودات لويس في تناول فكرة التضمن، أن المناطقة ينظرون إلى هذه الفكرة باعتبارها محورية في أي نسق منطقي، لهذا فإن كواين تناول فكرة التضمن مرة أخرى حتى يبين مدى اتساق الأفكار التي ذهب اليها، وهذا التناول يستند إلى فكرة لويس أيضاً المستمدة من رسّل حيث يقام التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري. فإذا كانت لدينا الصيغة (p ⊃ q) فإن هذه الصيغة تعبر عن دالة شرطية حيث p مقدم antecedent، q تال Consequent

---

(١) Ibid, p. 18.

والشرط هنا يكمن في أنه (إذا ... إذن...). لقد أوضح المناطقة قبل كواين أن صورة هذه الدالة تثبت الشرط؛ إلا أن كواين يرى أن إثبات الدالة الشرطية يعد بمثابة إثبات شرطي للنتيجة التي تنطوي عليها أكثر من كونها إثباتاً للشرط نفسه [1].

واتساقاً مع المبادىء المعروضة في برنكيبيا ماتياتيكا يرى كواين أن لهذه الدالة ثلاث حالات للصدق وحالة واحدة للكذب:

حالات الصدق:

(١) حالة صدق المقدم وصدق التالي معا

(٢) حالة كذب المقدم وصدق التالي

(٣) حالة كذب المقدم وكذب التالي

حالات الكذب:

(١) حالة صدق المقدم وكذب التالي:

ولكنه مع هذا يشير إلى أن هذه الدالة زائدة ويمكن الاستغناء عنها باستخدام أحد صيغتين [2]:

الصيغة الأولى: وتتمثل في استخدام السلب والوصل مثل ($p\,\bar{q}$)-

الصيغة الثانية: وتتمثل في استخدام السلب والفصل مثل ($\bar{p} \vee q$).

ولكن يبدو أن كواين قد غابت عنه نقطة هامة، ذلك أن نسق برنكيبيا يحدد بصورة دقيقة تعريف التضمن بدلالة السلب والفصل من جهة، ثم تعريفه مرة أخرى بدلالة السلب والوصل من جهة أخرى، وهذا ما يبدو لنا

---

(١) Ibid, p. 19.

(٢) Ibid, pp. 19-20

بوضوح من تعريف البرنكيبيا للتضمن كما يلي :

$$p \supset q = \sim p \vee q \qquad df$$
$$= \sim (p . \sim q) \qquad df$$

ومن ثم فإن الاختلاف الوحيد بين كواين والبرنكيبيا في وضع هذه الدالة يكمن في مسألة التجاور بين المتغيرات وعلامة السلب الجديدة ، إلى جانب هذا فإنه لا يمكن لنا الأخذ بفكرة كواين في الاستغناء عن دالة التضمن واستخدام بدائلها ، ذلك لأننا داخل نظرية البرهان حين نأخذ في البرهنة على نظرية من النظريات كتلك المعروضة في البرنكيبيا إنما نستند إلى قاعدة التعويض الذي يعني استخدام البدائل طالما أن البرهان يتطلب ذلك .

إلا أن الجديد في فكرة كواين عن الشرط هو تمييزه الدقيق بين أربعة أنواع من الشرط هي : (١) الشرط العام (٢) الشرط المادي (٣) الشرط غير الحقيقي (٤) الشرط المزدوج. أما النوع الأول وهو الشرط العام فإن كواين يقدم لنا المثال التالي : « إذا كان شيء ما حيواناً فقرياً ، إذن فله قلب » هذا المثال عبارة عن مجموعة اشتراطات يصح التعبير عنها كما يلي :

« في كل قيم x فإنه إذا كان x حيواناً فقاريا ، إذن x له قلب » .

أما الشرط المادي ، أو النوع الثاني الذي يشير إليه كواين ، فهو ذلك النوع المألوف لدينا حيث يقوم بين قضيتين « إذا كان p إذن q » ، أو بمعنى آخر $(p \supset q)$.

ويحاول كواين بعد ذلك أن يحدد النوع الثالث من الشرط وهو الذي يشير إليه بالشرط غير الحقيقي أي الذي يكون مقدمه كاذباً ونتيجته كاذبة [١] مثل « إذا كان ايزنهاور قد جرى ، لكان ترومان قد خسر » .

---

(١) Ibid, p. 20

يوضح كواين أن معالجة مثل هذا النوع من الشرطيات يرتبط بالعلية والعلاقة النوعية بين مادة المقدم ومادة التالي، أو بمعنى آخر فإن هذا الموضوع أقرب إلى المنطق المادي منه إلى المنطق الرياضي، ولكنه في نفس الوقت يوضح مدى الخلط الذي تعاني منه فكرة الدالة الشرطية، ولذا يرى أن الفكرة لا تنتمي للمنطق البحت بقدر انتمائها لنظرية المعنى Theory of meaning أو ربما فلسفة العلوم (١).

وإنطلاقاً من فكرة الشرط العام والشرط غير الحقيقي التي حددها كواين، يمكن تمييز الشرط المادي عنهما. فالشرط المادي كما يرى يقوم بذاته بين القضيتين ويقدم كواين الأمثلة التالية لتوضيح فكرته الأساسية:

المثال الأول: إذا كانت فرنسا في أوربا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثاني: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثالث: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر عذباً.

الشرط في هذه الأمثلة الثلاثة لا معنى له، كما يرى كواين، لأن صورة الشرط الأساسية تؤسس علاقة بين وقائع لا رابطة بينها. أضف إلى هذا أنه إذا أردنا إثبات أن فرنسا تقع في أوربا فليس هناك ما يدعو إلى استخدام اشتراطات بين قضايا نعلم صدقها وكذبها، لكن الشرط الحقيقي يقوم بين قضايا نحن لسنا متأكدون من صدقها أو كذبها كل على حدة.

أما النوع الرابع من الشرط فهو ما يسميه كواين بالشرط المزدوج، وهو عبارة عن شرط مادي مزدوج، حيث يكون على صورة وصل بين شرطين مثل:

---

(١) Ibid, p. 2;

$$(p \supset q) . (q \supset p)$$

وهو يعني « p إذا وإذا فقط q » وهـذا النـوع مـن الشرط يعبر عنـه نسـق برنكيبيا بالتكافؤ الآتي ($p \equiv q$) أي أن:

$$p \equiv q = (p \supset q) . (q \supset p)$$

ولهذا النوع من الشرط، كما نعلم، حالتان للصدق وحالتان للكذب.

حالتا الصدق:

١ ـ إذا كانت p صادقة، q صادقة.
٢ ـ إذا كانت p كاذبة، q كاذبة.

حالتا الكذب:

١ ـ إذا كانت p صادقة، q كاذبة
٢ ـ إذا كانت p كاذبة، q صادقة.

وحين تناول كواين هذا النوع من الشرط حاول أن يثبت أن صيغة التكافؤ (≡) زائدة ـ كما فعل في حالة الفصل والتضمن ـ وذلك عن طريق استخدام صيغة بديلة هي السلب والوصل، حيث بدلا من الصيغة ($p \equiv q$) يمكن استخدام الصيغة البديلة ($q\bar{p}$) ـ ($p\bar{q}$) ـ.

لقد وجد كواين أن الافكار والمفاهيم الجديدة التي قدمها يمكن أن تكون ذات فائدة عملية أكثر مما هو في الأنساق المنطقية الأخرى، فأضاف إلى هذه المفاهيم بعض التحليلات الجديدة، خاصة تلك التي تتعلق بقوائم الصدق، ثم حاول بعد ذلك أن يصحح بعض المفاهيم التي لدينا عن الإتساق والصحة المنطقية، ويمكن أن نتبين هذه التعديلات فيما يلي:

أولا - قوائم الصدق والتحليل

يشير كواين إلى أن منهج القدماء في تحليل الصيغ المنطقية يستند بالضرورة إلى استخدام قوائم الصدق «وهذا ما نجده عن فتجنشتين ولوكاشيفتش وبوست وغيرهم»؛ حيث توضع الصيغة المنطقية في قائمة صدق، وتوضع القيم تحت المتغيرات، ثم نقوم بإيجاد العلاقات بين المتغيرات من خلال تطبيق معنى الثوابت المنطقية. لكن كواين يرى أن هذا المنهج يتطلب منا تحليل القائمة حتى نكتشف مواضع الكذب في الصيغة، وهذا يعني بالضرورة أنه إذا كانت لدينا بعض الصيغ التي تحتوي على خمس متغيرات أو أكثر مثلا، فإن تحليلها يتطلب مزيداً من الدقة والجهد، إلى جانب الخطأ الذي قد تقع فيه. الأمر الذي يتطلب منا البحث عن وسيلة مثلى للتحليل، وهو ما يحاول كواين عرضه بصورة جديدة يختلف فيها مع المناطقة.

١ - يرى كواين أنه ليست بنا حاجة لاستخدام الرمزين F، T للإشارة إلى مفهومي «صادق وكاذب»، وإنما يمكننا فقط استخدام رمز واحد في وضعين وهو الرمز T فإذا كان الرمز T في هذا الوضع، فإنه يشير إلى «صادق»، وإذا كان في هذا الوضع T فإنه يشير إلى «كاذب».

٢ - لا يرى كواين ضرورة ملحة لتحليل الصيغة المنطقية بأسرها؛ كما يفعل السابقون، ولكنه يختار من بين المتغيرات التي لديه متغيراً ما ويفترض صدقه مرة وكذبه مرة أخرى، ثم يستنتج النتائج المترتبة على ذلك. فإذا ما تبين أن المتغير الذي اختاره صادقاً، افترض صدق أو كذب ثابت آخر، وهكذا حتى يتوصل إلى القيم النهائية للدالة.

٣ - إذا كان لدينا الوصل (TTT) فإنه يمكن اختصاره إلى (TT) ثم إلى (T) فقط.

٤ - إذا كان لدينا الفصل (⊥ v ⊥ v ⊥) فبانه يمكن حذف (⊥) بصورة تدريجية من هذا الفصل حتى نصل إلى (⊥).

٥ - إذا كان لدينا صيغة وصل تحوي ⊥ فانه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .

٦ - إذا كان لدينا صيغة فصل تحوي ⊥ فانه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .

٧ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها T فاننا نختصر هذا الشرط إلى التالي دون المقدم.

٨ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها ⊥ أو صيغة شرط تاليها T فإننا نختصره إلى T .

٩ - إذا كان لدينا صيغة شرط تاليها ⊥ فانه يمكننا اختصار الدالة إلى نفي المقدم.

١٠ - إذا كان لدينا شرط مزدوج فإننا نختصر منه T ، وتصبح الصيغة T ≡ T هي T ، وتصبح الصيغة T ≡ T هي ⊥.

١١ - نقوم بحذف ⊥ في الشرط المزدوج ونسلب الجزء الآخر حتى يمكن اختصار الدالة إلى هذا السلب.

إذن وفق هذا المنهج الجديد الذي يحدده كواين يمكننا إجراء التحليل على أي صيغة من الصيغ ، وهذا ما يتضح لنا من تحليل الصيغة الآتية :

$$‘p\, q \lor \bar{p}\, \bar{r} . \supset . q \equiv r’$$

نبدأ بتحليل هذه الصيغة كما يلي :

$$pqv\bar{p}\bar{r} . \supset . q \equiv r$$

نضع $\bot$ مكان p

$\bot q v T \bar{r} . \supset . q \equiv r$

$T \; v \bar{r} . \supset . q \equiv r$ باستخدام (٣، ٥)

$\bar{r} . \subset . q \equiv r$ باستخدام (٤)

نضع $\bot$ مكان r

$T \supset . q \equiv \bot$

$\bot \equiv q$ باستخدام القاعدة (٧)

$\bar{q}$ باستخدام القاعدة (١١)

$\bot T$

نضع T مكان r

$\bot \supset . q \equiv T$

T باستخدام القاعدة (٨)

نضع T مكان p

(1) $T q v \bot \bar{r} . \supset . q \equiv r$

(2) $q v \bot \bar{r} . \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٣

(3) $q' v \bot . \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٥

(4) $q \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٦

نضع T مكان q

$\bot \supset . \bot \equiv r$

T باستخدام القاعدة (٨)

نضع $\bot$ مكان q

$T \supset . T \equiv r$

$T \equiv r$ (1) باستخدام القاعدة ٧

r (2) باستخدام القاعدة ١٠

$T \bot$

على هذا النحو يكشف كواين عن مفهومه الجديد لتحليل الصيغ دون الاستعانة بقوائم الصدق. وبطبيعة الحال فإن فكرة كواين جديرة بالاعتبار خاصة إذا كانت لدينا متغيرات متعددة داخل الصيغة المطلوب تحليلها. هذا إلى جانب أن الفكرة في حد ذاتها تقتضي معالجات دقيقة من جانب المناطقة للكشف عن التطورات التي يمكن أن تحدثها في هذا الجانب.

ثانيا: الاتساق والصحة المنطقية

لقد وجد كواين أن موضوعي الإتساق والصحة المنطقة للصيغ لا بد من معالجته بصورة منطقية أفضل من تلك المعالجة التي درج عليها المناطقة، ولهذا فهو ينظر للصيغة الصحيحة منطقياً Valid Schema على أنها الصيغة التي تكون صادقة مهما صدقت أو كذبت المتغيرات التي بها. فعلى سبيل المثال الصيغة $q \vee \bar{q}$. تعد صحيحة منطقياً لأننا إذا أخذنا في تطبيق المنهج التحليلي لقيم الصدق حصلنا على النتيجة.

$p \vee \bar{p}$

$- \top \vee \bot$ $- \bot \vee \top$

$- \top$ $- \top.$

$\top$ (صادق في جميع الحالات)

أما الصيغة المتسقة منطقياً Consistent Schema فهي تلك الصيغة التي تصدق في بعض الحالات التي تكون عليها متغيراتها، ومثال هذه الصيغة '$p \vee q$' التي يمكن تحليلها كما يلي:

$p \vee q$

$\top \vee q$ $\bot \vee q$

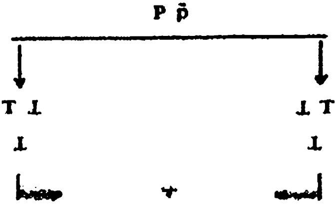
$\top \vee \bot$ $\top \vee \top$ $\bot \vee \top$ $\bot \vee \bot$

$\top$ $\top$ $\top$ $\bot$

$\top$

في هذه الدالة نجد أن التحليل النهائي قد أفضى بنا إلى حالة كذب واحدة وثلاث حالات للصدق ، ومن ثم تعتبر هذه الصيغة من الصيغ المتسقة.

كذلك يعالج كواين الصيغ غير المتسقة Inconsistant schema التي تكذب في كل الحالات التي تكون عليها متغيراتها. ومن أمثلة الصيغ غير المتسقة الصيغة «$p\ \bar{p}$» التي يمكن تحليلها كما يلي:



يتبين لنا من هذا التحليل أنه ليس ثمة حالات تصدق فيها مثل هذه الصيغة :

على هذا النحو يكون كواين قد عالج ثلاثة أنواع مستقلة من الصيغ هي :

(١) الصيغة الصحيحة منطقياً.

(٢) الصيغة المتسقة منطقياً.

(٣) الصيغة غير المتسقة منطقياً. ومن خلال المقارنات بين هذه الصيغ المختلفة يمكن لنا اثبات النتائج الآتية :

١ ـ أن الصيغة الصحيحة منطقياً هي في حد ذاتها نقيض الصيغة غير المتسقة منطقياً ، والعكس [illegible] نقيض الصيغة الصحيحة. على حين أن الصيغة المتسقة منطقياً نقيضها صيغة غير متسقة منطقياً.

٢ ـ أن اختبار صحة أي دالة من الممكن أن يتوقف في أي مرحلة دون أن نصل إلى نهاية التحليل ، وذلك بمجرد أن نحصل على نتيجة سلبية واحدة. فإذا حصلنا على تأليف من قيم المتغيرات نجد الصيغة فيه كاذبة (حالة كذب

الثابت الرئيسي فيها) فإن نتيجة التحليل تصبح سلبية.

٣ ـ أن الإجراء السابق ينسحب على عدم الإتساق، لأنه من الممكن أن نتوقف عن المضي في التحليل بمجرد الحصول على حالة واحدة تصدق فيها الصيغة.

٤ ـ في حالة اختبار الاتساق لا نصل إلى نتيجة سلبية قبل نهاية التحليل بأي حال من الأحوال، إلا أننا قد نتوقف عن التحليل عندما نحصل على حالتين على الأقل واحدة منها تصدق فيها الصيغة والأخرى تكذب فيها، ومن ثم فإن نتيجة التحليل تكون إيجابية ولا داعي للمضي حتى نهاية التحليل، وهذا ما نتبينه من الصيغة التالية:

$$p\,q \vee . \bar{q}\,\bar{r} . \supset . q \equiv r$$

$$\downarrow$$

$$T\,q \vee \bot\,\bar{r} . \supset . q \equiv r$$

$$q \vee \bot . \supset . q \equiv r$$

$$\downarrow$$

$$T \vee \bot . \supset . T \supset r$$

$$T \supset r$$

$$r$$

$$T \quad \bot$$

يتبين إذن من هذا التحليل أن الدالة متسقة وليس ثمة ضرورة للمضي في التحليل إلى ما هو أبعد من هذا.

٥ ـ تفيد الصيغ الصحيحة منطقياً في أنها تصدق في جميع الحالات المتعلقة بالمتغيرات التي تتكون منها، ولكن إذا فحصنا هذه الصيغ أو بعض أمثلتها لوجدناها مجرد تحصيل حاصل. على سبيل المثال الصيغة «$p \supset p$» صيغة تحليلية وهي لا تقول لنا شيئاً، وهو ما يمكن أن نتبينه من المثال المادي الآتي:

« إذا زحف الجنود إذن فقد زحف الجنود »

هذا المثال لا يوضح لنا حقيقة هل زحف الجنود أم لا ؟، ولهذا فإن كواين[١] يقرر أن أهمية الصيغة الصحيحة منطقياً ليست في كونها نتيجة مطلوب التوصل إليها، وإنما في كونها وسيلة لاختصار قيم الصدق.

٦ ـ أنه يمكن لنا الاستفادة من الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة في اختصار عملية التحليل ذاتها على اعتبار أن الصيغة الصحيحة يمكن أن ترفع إذا كانت تشكل جزءاً من صيغة أخرى ويوضع بدلا منها T. مثال ذلك:

$$\begin{array}{ccc} & q \vee \bar{p} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ T \vee \perp & & \perp \vee T \\ T & & T \\ & T & \end{array}$$

من هذا التحليل يتضح أن الصيغة يمكن رفعها ووضع «T» بدلا منها، فإذا قابلتنا هذه الصيغة كجزء من أي صيغة أخرى أمكن القيام بهذا الاجراء، وهذا هو جوهر الاختصار الذي يدعو له كواين.

كذلك للصيغة «$p\ \bar{p}$» يمكن رفعها ووضع «T» بدلا منها وهو ما يتبين من التحليل الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & p\ \bar{p} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ T\ \perp & & \perp\ T \\ \perp & & \perp \\ & \perp & \end{array}$$

ويمكن اتباع هذا في أي صيغة غير متسقة. لكن الصيغة المتسقة لا يصح

---

(١) Ibid, pp. 36 - 37.

فيها مثل هذا الإجراء. ولكن من أجل استكمال غاية التنظيم يمكن تحديد فئة الصيغ الصحيحة التي يمكن رفعها ووضع T مكانها؛ وهو ما نجده في الحالات الآتية:

- حالة الفصل بين أي متغيرات أو صيغ على أن يشتمل هذا الفصل على أي قضية ونقيضها، أو أي صيغة ونقيضها مثل:

p q v q r v s p̄ v – (p q) , «p v q v r v p̄»

- حالة الشرط أو الشرط المزدوج (التكافؤ) الذي نجد عنصريه متماثلين مثل:

"ss̄ ≡ ss̄", "qr ≡ qr", "qrvqs . ⊃ . qrvqs"

أما الصيغ غير المتسقة التي يمكن رفعها ووضع «⊥» بدلا منها، فإنه يمكن تحديدها أيضاً كما يلي:

- الوصل بين أي متغيرات أو قضية ونقيضها مثل:

pvq . svr . pvs . – (pvq), «pqrp̄»

- حالة الشرط المزدوج بين قضية أو صيغة ونقيضها مثل:

"qr ≡ – (qr)" "p ≡ p̄"

٧ - وهناك خاصية أخرى تتعلق بالصيغتين الصحيحة وغير المتسقة فقط وهذه الخاصية هي ما يطلق عليه كوايـن [١] صيغة استبدال حرف بصيغة Substitution of Schemata for letters، وهي تصدق في حالة الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة ولا تصدق في حالة الصيغ المتسقة. وهذه الخاصية تعني استبدال حرف من حروف (أي متغيرات) أي صيغة صحيحة أو

---

(١) Quine. W - V.. ibid. p. 38.

غير متسقة بأي صيغة كانت. ويمكن أن نحدد بعض الأمثلة التطبيقية على هذه الخاصية كما يلي:

- إذا قلنا أن الصيغة 'p v p̄' صيغة صحيحة فإنه يمكننا وضع 'q r' بدلا من 'p' فتنتج لنا الصيغة الصحيحة الآتية:

q r v – (q r)

- إذا قلنا أن الصيغة 'p p̄' صيغة غير متسقة فإنه يمكننا وضع 'q v r' بدلا من 'p' فتنتج لنا الصيغة غير المتسقة الآتية:

''q v r. – (q v r)''

- أما في حالة الصيغ المتسقة فإن الأمر يختلف، فإذا كانت لدينا الصيغة 'p v p q' وهي صيغة متسقة، وأردنا تطبيق عملية الاستبدال ووضع 'r r̄' مكان 'p' فإن الصيغة التي ستنتج لدينا هي:

''r r̄ v r r̄ q''

وهي صيغة غير متسقة، وهذا دليل على عدم انطباق قاعدة الاستبدال على الصيغ المتسقة.

إننا إذا دققنا في عمليات الاستبدال التي [illegible] أربعة أنواع على الأقل من الاستبدال، وهي:-

النوع الأول: استبدال حرف بآخر. وقاعدة هذه الحالة تشترط أنه إذا غيرنا حرفا بحرف آخر فإن هذا لا يتم بالنسبة لحرف واحد في الصيغة، وإنما يتم بالنسبة لكل الحروف المشابهة في الصيغة ذاتها، مثال ذلك الصيغ الآتية:

''p ⊃ q . q ⊃ r . ⊃ p ⊃ r''

فإذا رفعنا الحرف 'p' ووضعنا بدلا منه 's' فإن هذا الإجراء لا بد وأن

يتم في الصيغة كلها، فتصبح كما يلي:

$$``s \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset s \supset r"$$

النوع الثاني: استبدال حروف بالصيغ. وهذا هو النوع الذي يعالجه كواين ويلاحظ فيه أن الاستبدال يصح بالنسبة للصيغ الصحيحة وغير المتسقة، أما الصيغ المتسقة فلا يصح الاستبدال فيها، ومرجع ذلك أن الصيغ الصحيحة وغير المتسقة تكون كذلك بموجب تعريف ثوابتها مهما تغيرت تأليف الصدق والكذب بالنسبة للمتغيرات أو الصيغ الجزئية التي تربط بها هذه الثوابت، أما الصيغ المتسقة فهي مقيدة نسبياً بتأليفات قيم الصدق والكذب الخاصة بمتغيراتها.

النوع الثالث: استبدال الصيغ بصيغ. ولا يصح تطبيق هذا النوع كقاعدة عامة، رغم وجود بعض الاستثناءات لذلك في حالة الصيغ المتكاملة منطقياً والتي يمكن أن نجري عليها عملية الاستبدال.

النوع الرابع: استبدال صيغ بالحروف. وهذا النوع يعد في حد ذاته أضعف أنواع الاستبدال ولا يمكن أن يؤخذ كقاعدة.

ثالثاً: التضمن

يرى كواين أن من أدق أهداف المنطق بحث فكرة التضمن وبيان كيف أن قضية ما تتضمن قضية أخرى. فإذا كانت لدينا القضية p والقضية q فإنه علينا أن نوضح كيف أن p تتضمن q. مثال ذلك القضية «الطلاب ليسوا أذكياء» تتضمن القضية «الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين». يمكننا ترجمة كل قضية بصورة رمزية على النحو التالي:

الطلاب أذكياء	نرمز لها بالرمز	p
الطلاب ناجحون	نرمز لها بالرمز	q

الطلاب ليسوا أذكياء نرمز لها بالرمز • $\bar{p}$

الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين نرمز لها بالرمز $-(pq)$

الصيغة الرمزية للتضمن هنا يمكن تحديدها كما يلي:

$$\bar{p}' \text{ implies } -(pq)$$

نجد أن هذه الصيغة صحيحة، ومن ثم فهي صيغة تضمن. إذن فالتضمن يعني أنه لا تكون هناك ترجمة تبين الصدق والكذب لتغيرات الشرط حيث تكون الصيغة التي تمثل المقدم صادقة، والصيغة التي تمثل النتيجة كاذبة في نفس الوقت. وعلى هذا الأساس فإن كواين ينظر للتضمن على أنه الصحة المنطقية للشرط، ويمكن لنا اختبار هذه الفكرة عن طريق تحليل قيم الصدق كما يلي:

$$\bar{p} \supset -(pq)$$

$$\bot \supset -(T q) \qquad\qquad T \supset -(\bot q)$$

$$T \qquad\qquad T$$

$$T$$

كذلك إذا أردنا أن نعرف ما إذا كانت الصيغة '$p \vee q . \supset p q$' هي صيغة شرط أو تضمن، نقوم بإجراء التحليل كما يلي:

$$p \vee q . \supset p q$$

$$\downarrow$$

$$T \vee q . \supset T q$$

$$q$$

$$T \qquad \bot$$

ويتوقف التحليل إذا وجدنا حالة واحدة يكون فيها مقدم الشرط صادقاً وتاليه كاذباً. ونتيجة التحليل تبين لنا بوضوح تام أن الصيغة ,p v q لا تتضمن الصيغة ,p q.

ولكن نأتي الآن للسؤال الهام: هل يرى كواين أن ثمة قواعداً للتضمن؟

يرى كواين أن التضمن له قواعد محددة، وهذه القواعد يمكن تحديدها كما يلي:

القاعدة الأولى: أي صيغة تتضمن ذاتها. فإذا كانت الصيغة صادقة كان الشرط كما يلي ,T ⊃ T، والشرط في هذه الحالة صحيح. أما إذا كانت الصيغة غير صحيحة فإن صورة الشرط في حالة كذب الثابت الرئيسي في الصيغة ,⊥ ⊃ ⊥، والشرط في هذه الحالة صحيح أيضاً، وهذا يعني أن أي صيغة لا بد وأن تتضمن ذاتها.

القاعدة الثانية: إذا تضمنت صيغة صيغة أخرى، وتضمنت هذه الأخيرة صيغة ثالثة، فإن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثالثة.

القاعدة الثالثة: كل صيغة غير متسقة تتضمن كل الصيغ الممكنة سواء أكانت صحيحة أم متسقة أم غير متسقة، ولكن الصيغة غير المتسقة لا تتضمن إلا بواسطة صيغة غير متسقة.

القاعدة الرابعة: الصيغة الصحيحة لا تتضمن إلا الصيغة الصحيحة؛ ولكنها تتضمن بواسطة أي صيغة أخرى.

إلا أن كواين يرى أنه بالإضافة إلى هذه القواعد يمكن للرياضي أو المنطقي أن يعتمد على خياله ويستخدمه للتوصل إلى الصيغة أو الصيغ التي تنتج عن صيغة ما. فاذا كانت لدينا الصيغة ,p v q، فإنه يمكننا أن ندرك على الفور حالتين:

أ) الصيغ 'p'، 'q'، 'qp'، $\bar{p} \subset q$، تتضمن هذه الصيغة. •

(ب) الصيغ 'p v q v r'، $\bar{p} \subset q$، تتضمنها الصيغة التي لدينا أيضاً.

ولكن يشترط الفهم الدقيق للقدرة على اكتشاف مثل هذه الصيغ أكثر من أي شيء آخر. كذلك فإن هناك بعض الصيغ التي يتضح لنا من مجرد تأملها أنها لا تكون صحيحة إلا بترجمة واحدة لمتغيراتها، وبقية تأليفاتها لا تحقق صحة الصيغة مثل الصيغة $\bar{p}\ q$. هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا إذا كانت 'p' صادقة، 'q' كاذبة. في فحص مثل هذه الصيغة ومحاولة معرفة ما إذا كان يلزم عنها صيغ أخرى أم لا، نقوم بالإجراء التالي: نضع مكان كل متغير في الصيغة الثانية (أي الصيغة التي تتضمنها الصيغة المعطاة) قيمة الصدق أو الكذب الخاصة بنفس المتغير في الصيغة الأولى والتي تحقق الحالة الوحيدة المعطاة للصحة بالنسبة للصيغة الأولى، ثم نطبق منهج تحليل قيم الصدق على الصيغة، فإذا نتجت لدينا 'T' أو صيغة صحيحة فإن معنى هذا أن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثانية.

مثال: التضمن الآتي $\bar{p}\ q$' implies, $p \supset q\ .\supset r$، نضع T مكان 'p'، ⊥ مكان 'q' فنحصل على النتيجة.

$$`T \supset \bot .\supset r'$$

وبتحليل هذه الصيغة نحصل على

$$T \supset \bot .\supset r$$

$$\bot \supset r$$

$$T$$

ومعنى هذه النتيجة أن التضمن صحيح.

كذلك إذا كانت هناك بعض الصيغ التي يبدو لنا من مجرد ملاحظتها

أن الثابت الرئيسي يصدق في حالة واحدة فقط فإن هناك نوعاً آخراً من الصيغ يتضح أنها تصبح كاذبة بترجمة واحدة فقط لمتغيراتها أما بقية التآليف الممكنة للتغيرات فتحقق صدق الثابت الرئيسي. فالصيغة (pq) ـ تكذب فقط إذا كان كل من 'p', 'q' صادقاً، أي T. كذلك إذا فحصنا الصيغة.

$$p \supset p \,.\, q \supset r \text{ implies } p \supset r$$

لوجدنا أن $p \supset r$ تكذب فقط إذا كانت 'p' هي 'T'، 'r' هي '⊥' ثم نقوم بوضع T مكان 'p'، '⊥' مكان 'r' في الصيغة $p \supset q \,.\, q \supset r$، فينتج لدينا:

$$T \supset q \,.\, q \supset \perp$$

$$`q\ \bar{q}`$$

وهي صيغة غير متسقة مما يدل على أن التضمن المطلوب اثباته صحيح.

إن التضمن كما يشير إليه كواين يعتبر كذلك من ناحية قيم الصدق، أي بناء على الاعتبارات المنطقية وحدها، ولذا فهو يميز بين التضمن implication وعلاقة الشرط 'if... then' فالتضمن هو الصحة المنطقية لعلاقة الشرط بين صيغتين.

* * *

* *

تلك هي آخر التطورات المنطقية التي لا زال البحث يدور حولها حتى يومنا هذا، وقد كشف مؤتمر سالزبورج الأخير الذي عقد في يوليو ١٩٨٣ عن استمرار المناطقة وعلماء الرياضيات في بحث بعض الموضوعات الجزئية لتطوير البحث المنطقي الرياضي بصورة تتسق مع التفكير المنطقي الرياضي ذاته.

القسم الثاني

نظرية حساب القضايا في أنساق المنطق البولندي

الفصل الخامس

يان لوكاشيفتش ومقدمات النسق الاستنباطي لنظرية حساب القضايا

ركزت الدراسات المنطقية الحديثة، بصفة عامة، على دراسة المنطق الرياضي من خلال النسق الذي عرض في «مبادىء الرياضيات» للعلامة برتراندرسل وتوأمه الرياضي الفرد نورث هوايتهد، وقد عرف ذلك النسق في أوساط المناطقة وعلماء الرياضيات بنسق «برنكيبيا» Principia (١٩١٠ ـ ١٩١٣). وكان من الطبيعي أن تحتل دراسة هذا النسق صفحات وصفحات من نظرية المنطق لسهولة وبساطة النسق، من جهة، ولاصطناعه لغة رمزية دقيقة سهلت عملية الاتصال الفكري بين المناطقة وعلماء الرياضيات من جهة أخرى. إلا أن هذه البساطة لم تمنع بحال من الأحوال المحاولات التي بذلها مناطقة ورياضيون آخرون للتوصل لبناء أنساق بديلة تعتمد على أفكار منطقية أبسط من المعروضة في «البرنكيبيا»، الأمر الذي أشرنا إليه في القسم الأول.

ويهمنا أن نقرر هنا أن اتجاه الدارسين لمناقشة واستعراض نسق «البرنكيبيا» أدى إلى نتيجتين سلبيتين وهما: الأولى، تمثلت في إهمال التطور الدقيق والهام الذي حدث فيما بين الحربين العالميتين وأوائل الخمسينات لدى المناطقة البولنديين، ممن عملوا على تطوير أبحاث المنطق الرياضي، واصطنعوا في كثير من الحالات رمزية مختلفة عن رمزية «البرنكيبيا»، ومن

أهم هؤلاء الأعلام وأشهرهم، «يان لوكاشيفتش»[١]، و«بوخنسكي»، و«كوتربنسكي»، و«سلوبسكي» و«بوركوفسكي».

وتمثلت الثانية في إهمال الأبحاث والدراسات المنطقية عند العرب تحت تأثير الآراء القائلة بأن العرب لم يأتوا بجديد في المنطق، وأنهم في الغالب الأعم لم يضيفوا شيئاً جديداً للآراء المنطقية التي وفدت عبر حركة نقل التراث. وليس لهذا الرأي ما يبرره على مستوى الواقع الفكري للمنطق العربي، إذ توفر لنا أن نطلع على أبحاث منطقية عميقة ومتطورة، كشفت عن إبداع منطقي وفكري في هذا المجال، وقد تم تقديم ذلك في بحث آخر بصورة شبه متكاملة وربما أفضى هذا فيما بعد إلى كشوفات منطقية أبعد[٢].

لقد عرضنا لنسق منطق الموجهات عند لوكاشيفتش، ذلك المنطقي، الذي يعتبر علماً بارزاً من أعلام المدرسة البولندية الحديثة، وكانت فكرة البحث في الموجهات من الأفكار الهامة داخل حلقات البحث المنطقي على الصعيد العالمي، وقد اصطنع رمزية دقيقة حلت بعض الإشكالات المنطقية في إطار منطق الموجهات بصفة عامة. وحين عرضنا لنسق الموجهات، استبعدنا فكرة البحث عن النسق الاستنباطي الذي ينتظم نظرية حساب القضايا، فلم نكن وقتئذٍ بصدد معالجة تلك النظرية، وأردنا في الوقت نفسه أن نفرد لها مكاناً متميزاً لإبراز الإسهام البولندي الرائد في مجال فكرة النسق الاستنباطي بصورة عامة.

واستكمالاً لفكرتنا الرئيسية عن إسهامات المدرسة المنطقية في بولندا، اخترنا نموذجين اثنين لنعرض من خلالهما النسق الاستنباطي لنظرية حساب

---

(١) ترجم الدكتور عبد الحميد صبرة، نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصوري الحديث، والذي يعد من الأعمال الرائدة للمنطقي البولندي يان لوكاشيفتش، وصدرت الترجمة عام ١٩٦١.

(٢) راجع بعض الآراء الهامة حول المنطق العربي في

Rescher, N., The Development of Arabic Logic, Pittsburgh, 1964, PP. 222 FF.

القضايا، وكيفية إقامة النظرية بمجملها كنسق اكسيوماتيكي بحت. أما النموذج الأول فيتمثل في الأفكار التي قدمها لوكاشيفيتش لبناء النسق الاستنباطي. وأما النموذج الثاني، فيعرض لنا نسق سلوبسكي - بوركوفسكي الذي يُعد من أحدث الأنساق المتكاملة التي صدرت عن المدرسة البولندية في العشرين عاما الماضية.

وقد يكون من المناسب أن نشير إلى أن هذا النسق الأخير لا يعد بديلاً لنسق برنكيبيا، رغم أن سلوبسكي وبوركوفسكي كانا قد اقترحا هذا النسق، ووجدا فيه سهولة أكثر من نسق برنكيبيا. لكننا مع هذا سنظل أمام تساؤلات مفتوحة، وضعنا نسق برنكيبيا أمامها، وأهمها التساؤل عما إذا كان أي نسق منطقي جديد يسير في نفس اتجاه برنكيبيا؟ أم أن المناطقة، والرياضيين على السواء، يصطنعون لأنساقهم دربا آخراً غير المألوف في عالم برنكيبيا؟ وهل يمكن أن يعتبر من وجهة النظر هذه، النسق الذي ابتدعه سلوبسكي وبوركوفسكي مفيداً من وجهة النظر المنطقية والرياضية؟ أم أن نسق البرنكيبيا سيظل على الأقل لأجيال وأجيال قادمة هو الرائد، ما لم يتطور تفكيرنا الرياضي والمنطقي، على الأقل بصورة تكشف عنها تطورات واكتشافات منطقية جديدة؟.

إن كل هذه التساؤلات وغيرها، معروضة أمام العلماء منذ لا يقل عن نصف قرن من الزمان، وعلى كثرة وتعدد الأنساق المنطقية والرياضية المقترحة، لم يفلح علماء الرياضيات والمنطق في اصطناع بديل صحيح ونسقي إلا في أجزاء ضئيلة جداً من النظرية، ولم يكتب، حتى الآن لمحاولات الخروج على نسق برنكيبيا إلا نجاح محدود ولكي نتبيّن صحة هذا الرأي من عدمه لا بد من أن نتناول بالتحليل نسق لوكاشيفتش أولاً، ثم نتجه بعد ذلك إلى معالجة نسق سلوبسكي - بوركوفسكي مباشرة.

ناقشنا في الفصل الثاني منطق الموجهات عند لوكاشيفتش، وظهرت أهمية ذلك التناول من خلال تتبعنا لفكرة التضمن في أنساق المنطق

المختلفة. وكما زعمنا في مقدمة هذا البحث، يعد الإسهام المنطقي الرائد للمدرسة البولندية ذا مكانة خاصة في تاريخ المنطق بصفة عامة، وعلى درجة كبيرة من الأهمية في تناول أنساق أخرى بديلة غير نسق «برنكيبيا» الذي فتن علماء الرياضيات والمنطق معاً. أضف إلى هذا أنه كان بمقدور الأبحاث، التي تشير بوضوح إلى دقة الأنساق البديلة، أن تكشف عن رمزية جديدة تعالج البراهين الرياضية - المنطقية بصورة دقيقة، وعلى درجة من الوضوح والإيجاز والبساطة في الوقت نفسه.

ويُعد النسق الذي صاغه المنطقي البولندي لوكاشيفتش من أهم الأنساق المنطقية المعاصرة التي ظهرت في فترة ما بين الحربين. ونحن هنا نحاول أن نميط اللثام عن هذا الوجه المنطقي للمدرسة البولندية لنقدم صورة نسقية للأفكار التي قدمها لوكاشيفتش والتي قد يبدو من المناسب أن نعرض لأفكارها ومقدماتها الأساسية، ونترك مهمة استعراض النسق متكاملاً لمنطق ونسق «سلوبسكي - بوركوفسكي» الذي أقام صورة متكاملة للحساب.

الحدود الابتدائية وبديهيات حساب القضايا:

يستخدم نسق حساب القضايا عند لوكاشيفتش نوعين من الحدود الابتدائية هما:

١ - يرمز النسق لفكرة السلب Negation بالرمز N.
٢ - يرمز النسق للقضية الشرطية بالرمز C.

وينظر النسق لرمزي السلب والشرطية على أنهما الثوابت الابتدائية الرئيسية في ذلك النسق. بالإضافة إلى هذا يستخدم الحروف الصغيرة من الأبجدية اللاتينية كمتغيرات قضائية، أي كمتغيرات تأخذ قيما لتصبح قضايا.

والتعبير الذي صورته NP هو نفي القضية P. والتعبير ككل نطلق عليه دالة Function، وهذه الدالة تتألف من الرابط N، والحجة P.

ونلاحظ، كما في الأنساق المنطقية الأخرى، أن التعبيرين P، NP قضيتين متناقضتين، وهما لا تصدقان معاً، بمعنى أنه إذا كانت القضية P صادقة فإن القضية NP يجب أن تكون كاذبة، والعكس.

ويقدم النسق فكرة جديدة، حيث نجده يشير إلى القضية الكاذبة بالرمز O، ويشير إلى القضية الصادقة بالرمز 1، وبذا يصبح لدينا:

$$NO = 1 \quad , \quad N1 = O$$

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي: «نفي القضية الكاذبة قضية صادقة، ونفي القضية الصادقة قضية كاذبة».

والدالة Cpq قضية شرطية تعبر عن التضمن، وتقرأ «إذا p فإن q». في هذه الصيغة نجد أن الرابط C الذي يشير إلى التضمن جاء في بداية الدالة، على خلاف ما هو مألوف في منطق البرنكيبيا. لقد فضل لوكاشيفتش أن تأتي الرموز الدالة على الثوابت في بداية الدالة، والسبب الذي جعله يفضل هذا الإجراء رغبته في التخلص من الأقواس.

إلا أنه ينبغي تسجيل موقف هام يقدمه لوكاشيفتش على صيغة التضمن السابقة Cpq. إن هذه الصيغة كما يرى لوكاشيفتش، وفقاً لكل الآراء المنطقية السابقة، تعبر عن القضية: «If p is then q is»، أي «إذا كانت p موجودة فإن q موجودة». لكن هذه الصيغة، كما يرى لوكاشيفتش(١)، ليست صحيحة تماماً، والسبب في هذا أن الصيغة السابقة تكون ذات معنى فقط إذا عالجنا المتغيرات كحدود متغيرات. لكن التضمن Cpq لا توجد فيه إلا متغيرات قضائية.

وهنا نتساءل: ما هي، في رأي لوكاشيفتش، الحالات التي بموجبها تصبح Cpq صادقة أو كاذبة؟.

---

(١) Lukasiewicz, Jan., Elements of Mathematical Logic, Trans-by Olgierd Worjtasiewicz, Pergamon Press, London, 1963, P. 25.

إننا إذا استخدمنا الرمز 1 للإشارة إلى صادق، والرمز O للإشارة إلى كاذب، وبدأنا نحلل الصيغة السابقة للتضمن سنجد أن لدينا الحالات الأربع التالية:

C00, C01, C10, C11

نلاحظ على الحالات السابقة ما يلي:

١ ـ أن الحالة 0 = C10، حيث نجد هنا أن مقدم التضمن الصادق، وتاليه الكاذب، يؤدي إلى تضمن كاذب.

٢ ـ أن الحالة 1 = C00، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب وتاليه كاذب، هو تضمن صادق.

٣ ـ أن الحالة 1 = C01، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب، وتاليه صادق، هو تضمن صادق.

٤ ـ أن الحالة 1 = C11، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه صادق، وتاليه صادق أيضاً، هو تضمن صادق.

لقد أراد لوكاشيفتش أن يحقق جهازاً استنباطياً دقيقاً للمنطق، وفقاً لأفكار دقيقة ومحددة، حيث يستند النسق ككل إلى بديهيات Axioms ومبرهنات Theorems يطلق عليها معاً المصطلح مقررات Theses، وهو مصطلح اخذ أصلاً من المنطقي البولندي ليسنفسكي S. Lesniewski.

بديهيات نسق حساب القضايا:

يقدم النسق بديهيات ثلاثة رئيسية هي:

١ ـ *CCpqCCqrCpr* ,

٢ ـ *CCNppp* ,

٣ ـ *CpCNpq* .

يلاحظ على البديهية الأولى أنها إحدى صور قانون القياس الشرطي الذي صاغه أرسطو، هذا القانون الذي قد يظهر على الصورة التالية أيضاً:

$$CKOpqCqrOpr\ .$$

يلاحظ على الصورة التي لدينا أن الرمز K يرمز إلى الوصل، ومن ثم فإن الصيغة kpq تقرأ «p and q».

أما الصيغة الثانية لقانون القياس الشرطي فتقرأ:

«إذا (إذا p فإن q، وإذا q فإن r)، إذن إذا p فإن r».

وينبغي أن نلاحظ أن البديهية الأولى، السابق الإشارة إليها، يمكن أن تشتق من القانون الثاني للقياس الشرطي، بالإضافة إلى قانون التصدير الذي صورته:

$$CCKpqrCpCqr\ .$$

وهناك نقطة هامة تتعلق بصورة هذا القانون، فهو يسمح لنا في حالة التضمن الذي في مقدمة وصل من قضيتين، أن ننقل إحداهما مكان التالي، مثال ذلك التضمن التالي:

«إذا كان × عدد صحيح و × قابل للقسمة على ٣، فإن × يقبل القسمة على ٦».

في هذا التضمن باستخدام قانون التصدير وقاعدة التعويض، بالإضافة إلى إثبات التالي نحصل على:

«إذا كان × عدد صحيح، فإن (إذا كانت × قابلة للقسمة على ٣، إذن × تقبل القسمة على ٦)».

وعن طريق هذه الصورة نستطيع أن نتوصل إلى البديهية الأولى عن

طريق افتراض الصورة الثانية من قانون القياس الشرطي. فإذا وضعنا في الصيغة السابقة cpq بدلاً من p، cqr بدلاً من q، cpr بدلاً من r، فإننا نحصل على الصيغة التالية:

$$\underline{CCKCpqCqrCpr}\underline{CCpqCCqrCpr}\,.$$

وبنفس الطريقة يمكن أن نصل إلى صورة القانون الثاني للقياس الشرطي، ولكن عن طريق قانون الاستيراد الذي صورته:

$$CCpCqrCKpqr\,.$$

أما البديهية الثالثة والتي صورتها cpcnpq فإذا وضعنا 1 بدلاً من p فإننا نحصل على:

c1c n1q

وعن طريق قاعدة الإثبات بالفصل نحصل على:

cn1q

ولما كانت n0 = 1

إذن ينتج لدينا

c0q

معنى هذا أن البديهية ٣ تقرر تضمناً مقدمه كاذب وتاليه غير محدد.

وكما يلاحظ لوكاشيفتش(١) فإن البديهية ٣ يمكن اشتقاقها من قانون التصدير إذا ما أضفنا إليها مبرهنة أخرى، وقد كانت هذه الصورة مألوفة لدى دونس سكوتس Duns Scotus أحد أعلام الفلاسفة في أواخر القرن الثالث عشر وأوائل القرن الرابع عشر الميلادي. لقد أكد سكوتس أنه إذا كانت القضيتان المتناقضتان صادقتين معاً، فإن كل شيء سيصبح ممكناً،

والسبب في ذلك أنه ليس من الممكن أن تصدق المتناقضتين معاً. والمبرهنة التي قدمها سكوتس في هذه الحالة صورتها:

$$\underline{CKpNpq}\,.$$

لكننا نتساءل: هل يأخذ نسق لوكاشيفتش في الاعتبار بتعريفات وقواعد للاستدلال محددة؟ أم أنه يعتمد في نسقه على الأفكار السابق طرحها في الأنساق الأخرى، خاصة نسق برنكيبيا؟.

من الواضح أن نقطة البداية عند لوكاشيفتش مختلفة إلى حد كبير، فالنسق الذي بين أيدينا جديد في كل ما يطرحه من أفكار، وهو أيضاً يعتمد على تقديم أفكار جديدة ودقيقة بالإشارة إلى الأنساق الأخرى.

التعريفات وقواعد الاستدلال:

يشير النسق إلى أمرين هما:

١ ـ الحدود الابتدائية Primitive terms.

٢ ـ الحدود المعرّفة Defined terms.

لكن لوكاشيفتش يفضل أن يزودنا في البداية بنظرية للتعريف حتى يميز بين الأشياء، ولا يختلط المعرَّف بالمعرِّف. وهو يناقش المسألة من خلال مثال بسيط ودقيق معاً، خذ تعريف المربع مثلاً:

المربع = شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية.

نلاحظ على التعريف السابق علامة (=)، ونلاحظ أيضاً أن كلمة مربع جاءت على يمين العلامة (=)، وأن التعريف شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية، ورد على يسار العلامة (=). ومن هذا التعريف نجد أن الطرف الأيمن له نفس معنى الطرف الأيسر. إن الطرف الأيسر الذي يقول

شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية هـو المعرِّف definiens، وسنرمز له اختصاراً بالرمز (ds). أما الطرف الأيمن (مربع) فهو ما هو معرَّف definiendum، أي موضوع التعريف، وسنرمز له اختصاراً بالرمز (dm). إن ما هو معرف (dm)، وفق رأي لوكاشيفتش، لم يكن شاملاً قبل إدخال التعريف عليه، ولهذا السبب فإن معنى (dm) يوضح أو يشرح أو يفسر فقط بالمعرِّف (ds).

وواقع الأمر أن المعرِّف (ds) لا بد وأن يكون شاملاً وجامعاً حتى قبل إدخال التعريف، وهذا في ذاته بيّن ويبرهن استحالة تعريف كل حدود النظرية، وضرورة تبني بعض الحدود الابتدائية.

إلا أن لوكاشيفتش يرى أن هناك خاصية هامة وضرورية ينبغي إضافتها إلى ما سبق تقريره. فإذا كان ما هو معرف (dm) وارد في جملة صادقة، إذن فإن الجملة التي نحصل عليها من الأولى عن طريق إحلال ما هو معرّف (dm) بمعرف (ds) دقيق ينبغي أن يبقى صادقاً. على سبيل المثال إذا ورد المعرّف (ds) في قضية صحيحة إذن فإن استبدال المعرِّف (ds) بالمعرَّف (dm) بدقة يجب أن يؤدي إلى قضية صادقة.

إن آراء لوكاشيفتش حول التعريف، لا شك كانت معلومة ومعروفة جيداً في المنطق التقليدي، وقد فطن إليها المنطق الرياضي منذ بداية الأمر، وكذا تنبه إليها رسل وهوايتهد وهما بصدد وضع النسق المتكامل للبرنكيبيا. لكننا على أية حال نرى أن للتعريف أهمية كبيرة في نظرية حساب القضايا والنسق الاستنباطي ككل، ونقرر أن الميزة الكبرى للتعريف، بالإضافة إلى كونه يلعب دوراً هاماً وأساسياً في عملية الاستدلال، تكمن في أمرين: الأول، أن التعريفات تستخدم كاختصارات لتعبيرات معينة تنتمي إلى نظرية معينة معطاة لنا. والثاني، إننا حين نقدم مصطلحاً جديداً للتعريف، فإن هـذا المصطلح قد يسهم في تأسيس النظرية بصورة حدسية، ومن ثم يضيف إلى

الحدود التي تنتمي للنظرية موضوع التساؤل حدوداً جديدة ذات معنى(١).

أما الأمر الغريب فإنه يبدو في رأي لوكاشيفتش(٢) بأن رسّل وهوايتهد في البرنكيبيا نظرا للتعريفات على أنها زائدة من الناحية النظرية. ولسنا نرى لهذا الرأي أي مبرر، إذ أن نسق برنكيبيا على خلاف ما يعتقد لوكاشيفتش. لقد قرر رسّل وهوايتهد منذ البداية، أنهما يريدان أن يحققا للمنطق والرياضيات أيضاً أعلى درجة ممكنة من الصورية، وهذا لن يتسنى بطبيعة الحال إلا إذا نظر للتعريفات على أنها تأخذ الصورة الرمزية البحتة. والدليل على ذلك أنهما تخلصا من اللغة النظرية البحتة في متن النظريات، بعد أن انتهت مقدمة الكتاب. أضف إلى هذا أن نسق البرنكيبيا قدم لنا مجموعة من التعريفات الهامة في النظريات التي تناولها النسق(٣).

لا زال السؤال الذي يعنينا الآن هو: هل قدم لوكاشيفتش ضمن جهازه الرمزي تعريفات يمكن أن يبدأ منها النسق، أم لا؟.

يقدم لوكاشيفتش في نسقه مجموعة من التعريفات الأساسية التي ينظر إليها على أنها موضوعة في صورة رمزية كاملة، وهو يضع لنا هذه التعريفات مستفيداً من كل الأفكار التي سبق أن قدمها عن الصدق والكذب، والرابط، وغيرها.

١ ـ تعريف رابط الفصل:

إن أول تعريف يقدمه لوكاشيفتش هو تعريف رابط الفصل A، والذي يضعه ليناظر (or) في الانجليزية، و (أو) في العربية، تلك الرابطة التي تدل

---

(١) Curry, H. B., «First Properties of Functionality in Logical Expressions», J. of, Symbolic Logic, Vol. 2 (1937), PP. 2.

(٢) Ibid, P. 32.

(٣) راجع كتابنا: فلسفة العلوم: المنطق الرياضي، جـ ٣، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٨٥، ص ٨١ ـ ص ٨٧، ص ١٠٧، ص ١٦٩ ـ ص ١٧١، ص ١٩٨، ص ٢٠١، ص ٢٠٢، ص ٢١٨.

على البدائل. وينظر لوكاشيفتش إلى هذا الرابط على أنه العامل الأساسي في تكوين القضايا. ويقرر بذلك أن التعبيرين الآتيين لهما نفس المعنى: Apq، cnpq، ومن ثم فإن:

$$Apq = cnpq$$

ولهذا التعريف عند لوكاشيفتش، إذا استعنا بقيمتي صادق وكاذب، أربع حالات:

$$A00 = CN00 = C10 = 0\,,$$
$$A01 = CN01 = C11 = 1\,,$$
$$A10 = CN10 = C00 = 1\,,$$
$$A11 = CN11 = C01 = 1\,.$$

ومن هذه الحالات الأربع نشتق قانون رابط الفصل على النحو التالي: الدالة Apq تكون كاذبة فقط إذا كان المقدم والتالي فيها كاذبين معاً، وتصدق في الحالات الأخرى.

٢ ـ تعريف رابط الوصل:

يستخدم لوكاشيفتش من نسقه الرابط k ليناظر كلمة (and) في الانجليزية، وكلمة (و) في العربية، تلك الكلمة المستخدمة في لغة الحياة اليومية للتعبير عن الوصل. ويضع التعريف التالي لرابط الوصل.

$$kpq = ncpnq$$

نلاحظ على الصيغة التي لدينا أن التعريف الذي وضعه للوصل هو سلب التعبير cpnq، وصدق هذا التعبير يستبعد إمكانية صدق p، q معاً. وطالما أن الدالة kpq هي سلب أو نفي التعبير cpnq فإنها تكون صادقة فحسب إذا كانت الجملة (p and q) لا تستبعد إحداهما الأخرى، ولكنهما صادقتان معاً. وبذا فإن التعريف السابق يؤدي إلى الحالات الأربع التالية:

$$
\begin{aligned}
K00 &= NC0N0 = NC01 = N1 = 0\,, \\
K01 &= NC0N1 = NC00 = N1 = 0\,, \\
K10 &= NC1N0 = NC11 = N1 = 0\,, \\
K11 &= NC1N1 = NC10 = N0 = 1\,.
\end{aligned}
$$

من هذه الحالات الأربع يمكن لنا أن نستنتج قانون رابط الوصل على الصورة التالية: الدالة kpq تكون صادقة فقط إذا كان كلا من المقدم والتالي صادقين، وتكذب في بقية الحالات الأخرى.

٣ ـ تعريف رابط اللا ـ وصل:

يقدم لنا لوكاشيفتش في نسقه الرابط الجديد D الذي يرمز به إلى اللا ـ وصل، أو البديل النافي. وهذا الرابط لا نجد له مقابلاً في الأنساق الأخرى، ولا هو يماثل، أو يناظر أيضاً، كلمة محددة في اللغة الانجليزية. ويقدم لنا التعريف التالي:

$$Dpq = cpnq$$

ومن هذا التعريف نتوصل إلى الحالات الأربع التالية:

$$
\begin{aligned}
D00 &= C0N0 = C01 = 1\,, \\
D01 &= C0N1 = C00 = 1\,, \\
D10 &= C1N0 = C11 = 1\,, \\
D11 &= C1N1 = C10 = 0\,.
\end{aligned}
$$

ومن هذه الحالات الأربع نشتق القانون التالي: الدالة Dpq تكون كاذبة فقط إذا كان كل من المقدم والتالي صادقين، وفيما عدا ذلك من الحالات فإنها تكذب.

٤ ـ تعريف رابط التكافؤ:

يرمز لوكاشيفتش للتكافؤ بالرمز E، ويقدم لنا التعريف التالي:

$$Epq = nccpqncqp$$

والتعبير Epq يقرأ «p إذا وفقط إذا q». ومن التعريف السابق نحصل على الحالات الأربع التالية:

$$E00 = NCC00NC00 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1\,,$$
$$E01 = NCC01NC10 = NC1N0 = NC11 = N1 = 0\,,$$
$$E10 = NCC10NC01 = NC0N1 = NC00 = N1 = 0\,,$$
$$E11 = NCC11NC11 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1\,.$$

من هذه الحالات الأربع نشتق التعريف التالي:

الدالة Epq تكون صادقة فقط إذا كانت p، q صادقتين معاً أو كاذبتين معاً. أما إذا كانت إحداهما صادقة والأخرى كاذبة فإن الدالة فكرة كاذبة.

تلك هي الأفكار الرئيسية التي يقدمها لنا المنطقي البولندي «يان لوكاشيفتش» والتي على أساسها يقيم النسق المتكامل لنظرية المنطق. ولما كان منطق الموجهات عند لوكاشيفتش الذي قدمنا عرضاً له في «المنطق الرياضي: التطور المعاصر» قدم صورة برهانية لكيفية انتقال النسق عند «لوكاشيفتش» للبرهنة ابتداءً من مقدمات النسق، فقد رأينا أن نكتفي باستعراض أسس نظرية حساب القضايا في نسقه، على أن نقدم صورة نموذجية متكاملة للحساب عند «سلوپسكي - بوركوفسكي» في النسق الذي سنعرض له توّاً.

الفصل السادس

سلوبسكي - بوركوفسكي والنسق المتكامل لنظرية حساب القضايا

الرمزية والصيغ في نسق سلوبسكي - بوركوفسكي:

يستخدم نسق سلوبسكي - بوركوفسكي نوعين من الرموز:

١ - رموز يشير بها إلى المتغيرات القضائية[1] Sentential Variables

$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \ldots$$

وهذه الرموز تتفق مع الرمزية المستخدمة في برنكيبيا ماتيماتيكا؛ إلا أن رسّل وهوايتهد لم يستخدما في نسق البرنكيبيا p_1، q_1، r_1، . . . وتشير هذه المتغيرات إلى قضايا، أو جمل sentences توصف بأنها إما صادقة true أو كاذبة False.

٢ - الثوابت Constants وهي تمثل الروابط التي تقوم بين المتغيرات القضائية لتشكل صيغاً مركبة، وهذه الثوابت هي:

أ - ثابت النفي negation ويرمز له بالرمز $\neg$، ويصبح التعبير «$\neg p$» معبراً عن نفي القضية p. ويقرأ not p أو «ليس من الصادق أن p».

ب - ثابت الوصل Conjuntion ويرمز له بالرمز $\wedge$، الذي يعبر عن الضرب المنطقي في الصيغة المركبة «$p \wedge q$» التي تقرأ «p و q».

---

(١) يفضل مناطقة المدرسة البولندية بصفة عامة استخدام مصطلح Sentence، Sentential Variables بدلاً من مصطلح البرنكيبيا Proposition، Propositional Variables.

حـ ـ ثابت الفصل disjunction ورمزه ∨، والذي يعبر عن الجمع المنطقي في الصيغة المركبة «p ∨ q» التي تقرأ «p أو q».

ء ـ ثابت التضمن implication ورمزه ←، حيث الصيغة المركبة «p → q» تقرأ «إذا p فإن q».

هـ ـ ثابت التكافؤ equivalence ورمزه ≡، حيث الصيغة المركبة «p ≡ q» تقرأ «p إذا وإذا فقط q».

تعبر هذه الثوابت عن المفهومات الأولية للعمليات المنطقيـة التي سيعمل من خلالها نسق سلوبسكي ـ بوركوفسكي، حيث نلاحظ عليها ملاحظتين أساسيتين لا بد من تسجيلهما وهما:

أولاً : أن ثابت النفي المستخدم في هذا النسق يختلف عن الأنساق الأخرى. لقد استخدم رسِّل وهوايتهد الثابت ~ في نظرية حساب القضايا، واستخدم لويس في كتاباته المختلفة[1] الثابت (−) للتعبير عن النفي أو السلب، والملاحظ أيضاً أن هلبرت[2] استخدم من قبل نفس الثابت للتعبير عن السلب. أما لوكاشيفتش فقد فضل أن يخرج من نطاق هذه الرمزية الدارجة ويستخدم حرف الأبجدية N ليعبر به عن السلب.

ثانياً : أن استخدام سُلوبسكي ـ بوركوفسكي لثابت التضمن ← لم يكن الأول من نوعه، فقد استخدم هلبرت نفس الثابت من قبل. أما لويس فيختلف استخدام ثابت التضمن الدقيق عنده ⥽ عن ثابت التضمن عند سلوبسكي ـ بوركوفسكي.

---

(١) راجع في ذلك:

Lewis, C.I., A Survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.

Lewis, C.I. and C.H. Langford., Symbolic Logic, New York, 1932.

(٢) راجع ما كتبناه عن هلبرت في: المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص ٢٧٣ ـ ص ٢٨١.

ومن الواضح أن استخدام الروابط $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، $\equiv$، في نسق سلوبسكي - بوركوفسكي يشير إلى قضايا مركبة جديدة، تماماً كما هو الحال في نسق برنكيبيا.

كذلك لا يستخدم النسق الذي بين أيدينا الأقواس، لقد استبعدها تماماً حتى لا يحدث أي خلط بين الصيغ. ومن جانب آخر نجد أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي يحدد الصيغ القضائية التالية:

١ - أن المتغيرات القضائية هي في حد ذاتها صيغ قضائية.

٢ - إذا كانت $\varnothing$ وكذلك φ صيغاً قضائية إذن فإن:

$$\neg\varnothing \text{ و } \varnothing \wedge \varphi \text{ و } \varnothing \vee \varphi \text{ و } \varnothing \rightarrow \varphi \text{ و } \varnothing \equiv \varphi$$

هي في حد ذاتها صيغ قضائية.

٣ - كل صيغة قضائية في حساب القضايا إما إنها متغير قضائي أو أنها مؤلفة من متغيرات قضائية بموجب القاعدة السابقة.

لقد استبقى هذا النسق الحروف اليونانية $\varnothing$، φ، χ كمتغيرات تشير إلى الأسماء في نظرية حساب القضايا، كما هو الحال في نسق البرنكيبيا.

القواعد الابتدائية:

يشير المؤلفان إلى أن نسق حساب القضايا ككل يمكن تأسسة من خلال منهجين هما:

١ - منهج أو طريقة الافتراضات Method of Assumptions.

٢ - المنهج أو الطريقة الأكسيوماتيكية Axiomatic Method.

أما المنهج الأول وهو منهج الافتراضات فلم يدعى المؤلفان الفضل في ابتكاره، وهما يشيران إلى أن ياسكوفسكي Jaśkowski وجنتيزن Gentzen بدءاه وطوراه فيما بين الأعوام ١٩٣٤، ١٩٣٥؛ إلا أنهما يشيران

في نفس الوقت إلى اختلافات شديدة بين المفهومين، وقد عرض بوركوفسكي وسلوبسكي في عام ١٩٥٨ لاقتراح منهج الافتراضات في ورقة قدماها بعنوان: نسق منطقي يستند إلى قواعد مع تطبيق على تعليم المنطق الرياضي - وقد جاء هذا العرض في مجلة الدراسات المنطقية Studia Logica العدد السابع، ثم طورا البحث في هذا الجانب فيما بعد في كتابهما عن عناصر المنطق الرياضي حيث عرضا لمجموعة من القواعد الابتدائية الداخلة في حساب القضايا مباشرة وهي:

١ - قاعدة الفصل The rule of detachment، ويرمز لها النسق بالرمز RD وهذه القاعدة تقرر:

$$\text{RD} \qquad \frac{\begin{array}{c}\varnothing \rightarrow \varphi \\ \varnothing\end{array}}{\varphi}$$

ويجب أن نلاحظ أن هذه القاعدة تطلق على قاعدتين معاً وهما:

(١) قاعدة التعويض Substitution، (٢) قاعدة الإثبات Modus Ponens، وقاعدة الـ detachment تختلف عن قاعدة الفصل التي سيرد ذكرها فيما بعد.

٢ - قاعدة ربط الوصل The rule of Joining a Conjunction، ويرمز لها النسق بالرمز RC، وهي تقرر:

$$\text{RC} \qquad \frac{\begin{array}{c}\varnothing \\ \varphi\end{array}}{\varnothing \wedge \varphi}$$

ويجري تطبيق هذه القاعدة على النحو التالي:

$$\frac{\begin{array}{c}a < X \\ X < b\end{array}}{a < X \wedge X < b}$$

أو بصيغة أخرى:

$$a < X < b$$

٣ ـ قاعدة حذف الوصل The rule of Omitting a Conjunction، ويرمز لها النسق بالرمز OC، وتقرر:

$$\text{OC} \qquad \frac{\varnothing \wedge \varphi}{\varnothing,} \qquad \frac{\varnothing \wedge \varphi}{\varphi.}$$

بمعنى أنه إذا كان الوصل محتوي في البرهان، فإن أي عنصر من عناصر الوصل ينطبق عليه البرهان ذاته. ولهذه القاعدة صياغات أخرى منها:

$$\frac{\varnothing \wedge \varphi}{\begin{array}{c}\varnothing \\ \varphi\end{array}}$$

وبصورة أكثر عمومية:

$$\frac{\begin{array}{c}\varnothing_1 \\ \vdots \\ \varnothing_n\end{array}}{\begin{array}{c}\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k\end{array}}$$

حيث إذا كانت الصيغة $\varnothing_n$ و. . . . و $\varnothing_1$ محتواه في البرهان، فإن الصيغ φ_k و. . . و φ_1 تلحق بذات البرهان وينطبق عليها، مثال ذلك:

$$\frac{a < x \wedge x < b}{a < x} \qquad (\text{or: } a < x < b) \qquad \frac{a < x \wedge x < b}{x < b.}$$

٤ ـ قاعدة ربط الفصل The rule of Joining a disjunction التي يرمز لها النسق بالرمز JD، وتقرر:

$$\text{JD} \qquad \frac{\varnothing}{\varnothing \vee \varphi} \qquad \frac{\varphi}{\varnothing \vee \varphi}$$

تقرر هذه القاعدة أن الفصل قد يلحق بالبرهان إذا كان أحد عناصره محتوى في البرهان فعلاً. ومثال هذه القاعدة:

$$\frac{a > 0}{a > 0 \vee a = 0} \qquad (\text{or: } a \geqslant 0) \qquad \frac{a = 0}{a > 0 \vee a = 0.}$$

٥ ـ قاعدة حذف الفصل The rule of Omitting a disjunction ويرمز لها النسق بالرمز OD، وتقرر:

$$\text{OD} \qquad \frac{\begin{array}{c}\varnothing \vee \varphi \\ \neg\varnothing\end{array}}{\varphi}$$

تقرر هذه القاعدة إنه إذا كان الوصل ونفى أحد عناصره محتوى في البرهان، فإنه العنصر الآخر للفصل يلحق بالبرهان ويطبق عليه. خذ المثال التالي على الاستدلال بواسطة هذه القاعدة:

$$\frac{\begin{array}{c}a > o \vee a = o \\ \neg\, a > o\end{array}}{a = o.}$$

٦ ـ قاعدة ربط التكافؤ The rule of joining an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز JE، وتقرر أن:

$$\text{JE} \qquad \frac{\begin{array}{c}\varnothing \rightarrow \varphi \\ \varphi \rightarrow \varnothing\end{array}}{\varnothing \equiv \varphi}$$

تقرر هذه القاعدة أن التكافؤ $\varnothing \equiv \varphi$ قد يلحق بالبرهان إذا كان البرهان محتوياً على التضمن $\varnothing \rightarrow \varphi$ والتضمن العكس $\varphi \rightarrow \varnothing$.

٧ ـ قاعدة حذف التكافؤ The rule of omitting an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز OE، وتقرر هذه القاعدة أن:

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\varphi \to \emptyset.} \qquad \frac{\emptyset \equiv \varphi}{\emptyset \to \varphi,} \qquad \text{OE}$$

حيث إذا كان أي تكافؤ ينتمي إلى البرهان إذاً فعلينا أن نلحق بالبرهان التضمن الذي مقدمه العنصر الأول من عناصر التكافؤ وتاليه العنصر الثاني، والتضمن الذي يكون عكس الأول. وفي هذه الحالة يسمى التضمن الأول تضمناً بسيطاً.

لكن ينبغي علينا أن نتساءل عن مصدر القواعد التي حددها المنطقيان سلوبسكي وبوركوفسكي. هل ابتكرا القواعد السابقة؟ أم أنها وجدت لدى مناطقة آخرون في أوقات سابقة؟ إذا كانت هذه القواعد موجودة من قبل، هل استخدمت بنفس الصورة؟ أم أن نسق سلوبسكي ـ بوركوفسكي أول ما استفاد من وضع هذه القواعد؟ علينا إذن أن نبحث هذا الجانب التطويري المنطقي.

المقررات والقواعد المشتقة:

يجدر بنا أن نثبت هنا بصورة سريعة ومختصرة ما سبق أن ذكرنا حول القواعد السبعة السابقة. أول هذه القواعد تلك التي تعبر عن التعويض والإثبات معاً ورمزنا لها بالرمز RD، ثم ربط الوصل RC، وحذف الوصل هي OC، وربط الفصل JD، وحذف الفصل OD، وربط التكافؤ JE، وحذف التكافؤ OE.

يركز نسق سلوبسكي ـ بوركوفسكي على إعمال منطقي جيد ودقيق لقاعدة حذف الوصل OC كقاعدة مشتقة لبناء البرهان ابتداءً من الافتراضات، ويستخدم بالإضافة إلى هذا القواعد المنطقية الأخرى. ومن ثم نتساءل كيف يقدم لنا سلوبسكي ـ بوركوفسكي في نسقهما الجديد طريقة جديدة بسيطة للبرهان، تعتمد على القواعد السابق تحديدها؟ وهل يبرهن النسق على قوانين أو نظريات قديمة مألوفة، بصورة جديدة تقرب للذهن صورة القانون أو

النظرية موضع البرهان؟ هذا ما يتعين علينا أن ننظر فيه الآن من خلال براهين النسق المتعددة على القوانين الهامة.

١ - يبرهن النسق على القانون الثاني للقياس الشرطي والذي صورته:

$$\text{T1.} \qquad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

البرهان

$$\begin{array}{lll}
(1) & \left.\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \end{array}\right\} & \\
(2) & & \\
(3) & & \\
(4) & q & \{RD: 1, 3\} \\
 & r & \{RD: 2, 4\}
\end{array}$$

نلاحظ أن الرمز T هنا يرمز إلى كلمة مقررة Thesis، ونلاحظ أيضاً أن البرهان يطبق القواعد مباشرة.

٢ - برهن على قانون التصدير والذي صورته:

$$\text{T2} \qquad (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

كان المنطقي الإيطالي جيوسيب بيانو Peano أول من حدد صورة مبدأ التصدير في كتابه Formulaire de Mathematique، وقد عرض رسّل Russell لهذا المبدأ في «أصول الرياضيات» Principles of Mathematics (١٩٠٣)، ثم في «مبادىء الرياضيات» Principia Mathematica (١٩١٠ - ١٩١٣)، ثم في كتابه «مقدمة للفلسفة الرياضية» (١٩١٩). وفي القضية ٣,٣ حدد رسّل - هوايتهد صورة مبدأ التصدير في «برنكيبيا» بالصيغة:

$$3.3 \qquad [(p \,.\, q) \supset r] \supset [p \supset (q \supset r)]$$

نلاحظ إذن التشابه بين صورتي T2، 3.3 مع اختلاف الرموز المستخدمة ويبرهن النسق الجديد على هذه المقررة كما يلي:

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & p \wedge q \rightarrow r \\
(2) & p \\
(3) & q
\end{array}\right\} \quad (a.)
$$

$$
\begin{array}{lll}
(4) & p \wedge q & \{JC: 2, 3\} \\
 & r & \{RD: 1, 4\}
\end{array}
$$

٣ - والصورة الأخرى المرتبطة بقانون التصدير T2، قانون الاستيراد الذي سبق أيضاً أن حدده بيانو وبرهن عليه نسق برنكيبيا. لكن نسق سلويسكي - بوركوفسكي ينظر لقانوني التصدير والاستيراد على أنهما مترابطان، بمعنى أن القانون الثاني (الاستيراد) يعتبر حالة من حالات القانون الأول.

T2a. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

البرهان

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1) & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
(2) & p \\
(3) & q
\end{array}\right\} \quad (a)
$$

$$
\begin{array}{lll}
(4) & q \rightarrow r & \{RD: 1, 2\} \\
 & r & \{RD: 4, 3\}
\end{array}
$$

والصورة الأخرى التي يقدمها النسق لهذه المقررة هي:

T2b. $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r).$

البرهان

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)] & \{T2\} \\
(2) & [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r) & \{T2a\} \\
 & p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) & \{JE: 1, 2\}
\end{array}
$$

يعتبر هذا البرهان صورة مباشرة للمقررة السابقة، وكل جزء من أجزاء هذا البرهان هو في حد ذاته مقررة قائمة بذاتها ويمكن البرهنة عليها.

٤ ـ أما المقررة التالية فنقدم عليها البرهان بصورة غير مباشرة:

T4 $p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p).$

البرهان

(1)	$p \vee q$	{a}
(2)	$\neg q$	
(3)	$\neg p$	{a-i-p}
(4)	q	{od: 1, 3}

كما هو ملاحظ يمكننا أن نبرهن أي صيغة لها الصوره:

$$\varnothing \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \varnothing)$$

حيث $\varnothing$، φ هي أي صيغ في نظرية حساب القضايا. ونلاحظ أيضاً أن النسق بصفة عامة ينظر إلى البرهان في مثل هذه الحالة على أنه يستند إلى الافتراضات ١، ٢ في البرهان السابق، وخطوات البرهان غير المباشر. وإذا طبقنا القاعدة OD على ١، ٣ فنحصل على φ في الخطوة الرابعة، ومن ثم يصبح البرهان كما يلي:

(1)	$\varnothing \vee \varphi$	{a}
(2)	$\neg\varphi$	
(3)	$\neg\varnothing$	{a-i-2}
(4)	φ	{OD: 1; 3}

وهذا يناقض الخطوة {٢ ، ٤}

على سبيل المثال: الصيغة:

(a) $(p \equiv q) \vee p \wedge r \rightarrow [\neg(p \wedge r) \rightarrow (p \equiv q)]$

هذه الصيغة ترد إلى الصورة:

$$\varnothing \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \varnothing)$$

حيث نلاحظ أن $\varnothing = (p \equiv q)$، $\varphi = (p \wedge r)$ وفي هذه الحالة يكون البرهان كما يلي:

(1)	$(p \equiv q) \vee p \wedge r$	{a}
(2)	$\neg(p \wedge r)$	
(3)	$\neg(p \equiv q)$	{a-i-p}
(4)	$p \wedge r$	{OD: 1, 3}

وهذا يناقض {٢، ٤}

من أجل هذا يضع نسق سلوبسكي - بوركوفسكي المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٤ : أي صيغة في نظرية حساب القضايا لها الصورة:

$$\emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \emptyset)$$

هي مقررة.

لكن النسق يضع لمصطلح مقررة استعارة رمز فريجة الخاص بعلامة التقرير التي كان فتجنشتين قد اقترح إلغائها، فالصيغة (Ø مقررة) = في هذا النسق (Ø ⊢)، وبذا تكتب المبرهنة السابقة كما يلي:

$$\vdash \emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \emptyset)$$

وذلك حتى يسهل التعامل مع مقررات النسق ومبرهناته.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن للمقررة T4 صورة أخرى يمكن البرهنة عليها:

T4b $\quad \neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$

البرهان

(1)	$\neg p \vee q$	{a}
(2)	p	
(3)	$\neg q$	{a, i, p}
(4)	$\neg p$	{OD: 1, 3}

وهذا يناقض (٢، ٤)

نلاحظ أن الصورة السابقة للمقرره T4 يطلق عليها قانون العلاقة بين الفصل والتضمن.

٥ ـ ويقدم النسق صورة لقاعدة حذف النفي المزدوج والتي يرمز لها بالرمز ON حيث:

T5a $\quad p \rightarrow \neg\neg p$

البرهان

(1)	p	{a}
(2)	$\neg\neg\neg p$	{a-i-p}
(3)	$\neg p$	{ON: 2}

وهذا يناقض (١، ٣)

ويشتق من هذه القاعدة، قاعدة وصل النفي المزدوج JN، حيث:

T5b $\quad \neg\neg p \equiv p \quad$ {JE: T5; T5a}

ويلاحظ على المقررة السابقة ما يلي:

١ ـ T5، T5a، T5b يطلق عليها قوانين النفي المزدوج Laws of double negation.

٢ ـ ونلاحظ كذلك بصفة خاصة أن القانون T5b يقرر أن النفي المزدوج للقضية مكافىء للقضية ذاتها. وقد لاحظ الرواقيون هذا الأمر قديماً وعرفوه جيداً.

٣ ـ كذلك يشتق من القاعدة JN (وصل النفي المزدوج) الصورة التالية:

$$\frac{\neg\varnothing \vee \varphi \qquad \varnothing}{\varphi} \qquad\qquad \frac{\varnothing \vee \neg\varphi \qquad \varphi}{\varnothing}$$

البرهان

(1) $\omega \varnothing \vee \neg \omega$ {a}

(2) ω

(3) $\neg\neg\omega$ {JN: 2}

$\varnothing$ {OD: 1; 3}

البرهان

(1) $\neg \varnothing \vee \omega$ {a}

(2) $\varnothing$

(3) $\neg\neg\varnothing$ {JN: 2}

ω {OD: 1; 3}

تجدر الملاحظة هنا إنه سبق للرواقية أن قدمت هذه الصور، وتوسعت في استخدامها في نطاق منطق القضايا الشرطية[1].

٦ ـ وقد أضاف النسق صورة قانون النقل The law of Transposition والتي تقررها المقررة:

$$T6 \qquad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

البرهان

(1) $p \rightarrow q$ {a}

(2) $\neg q$

(3) p {a-i-p}

(4) q {RD: 1; 3}

وهذا تناقض {٢، ٤}، وبالمثل يمكن البرهنة على الشق الثاني من المبرهنة.

ويجب أن نلاحظ أن قاعدة قانون النقل الأساسية كانت معروفة لدى أرسطو، وكذلك يعتبر مبدأ النقل من المبادىء الأساسية التي

---

(١) راجع ما سبق أن ذكرناه حول هذا الموضوع في: المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص ٢٠ ـ ص ٢٢.

استخدمها نسق برنكيبيا في صوره الأربع[1] التي تحددها القضايا (٢,٠٣، ٢,١٥، ٢,١٦، ٢,١٧).

٧ ـ وهناك صورة مركبة لقانون النقل تقررها المقررة:

T ٦ $\quad p \wedge q \rightarrow r \equiv p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$

البرهان

(1)	$p \wedge q \rightarrow r$	{a}
(2)	p	
(3)	$\neg r$	
(4)	q	{a-i-p}
(5)	$p \wedge q$	{JC: 2, 4}
(6)	r	{RD: 1; 5}

وهذا تناقض {٣، ٦}

٨ ـ قانون التبسيط The law of Simplification وصورته تقررها المقررة

T 10 $\quad q \rightarrow (p \rightarrow q)$

البرهان

(1)	q	{a}
(2)	p	{a-i-p}
(3)	$\neg q$	

وهذا تناقض {١، ٣}

٩ ـ قانون الذاتية للتضمن The Law of Identity for Implication وصورته:

T 11 $\quad p \rightarrow p$

البرهان

(1)	p	{a}
(2)	$\neg p$	{a-i-p}

تناقض (١، ٢)

---

(١) المرجع السابق، ص ١٠٩.

١٠ ـ قانون الذاتية للتكافؤ The law of Identity for equivalence وصورته:

$$T\ 11a \qquad p \equiv p$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow p$	{T 11}
(2)	$p \equiv p$	{JE: 1; 1}

١١ ـ ويبرهن النسق على علاقة التكافؤ بالتضمن كما يلي:

$$T\ 12 \qquad (p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$$

البرهان

(1)	$p \equiv q$	{a}
(2)	$p \rightarrow q$	{OE: 1}
(3)	$q \rightarrow p$	{OE: 1}
	$q \equiv p$	{JE: 3; 2}

يلاحظ أن صور المقررات T 11a، T 12 تقرر أن التكافؤ يتمتع بخاصية كونه انعكاسياً وتماثلياً في نفس الوقت.

١٢ ـ والصور الآتية تحدد أن قاعدة الإثبات بالإثبات صحيحة بالنسبة للتكافؤ:

$$RD \qquad \frac{\varnothing \equiv \varphi \quad \varnothing}{\varphi} \qquad\qquad \frac{\varnothing \equiv \varphi \quad \varphi}{\varnothing}$$

البرهان

(1)	$\varnothing \equiv \varphi$	{a}
(2)	φ	
(3)	$\varphi \rightarrow \varnothing$	{OE: 1}
	$\varnothing$	{RD: 3; 2}

البرهان

(1)	$\emptyset \equiv \varphi$	{a}
(2)	$\emptyset$	
(3)	$\emptyset \rightarrow \varphi$	{OE: 1}
	φ	{RD: 3, 2}

١٣ ـ ويقدم النسق البرهان على المقررة التالية :

T 16a $\qquad (p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q \wedge r$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$q \wedge r$	{RD: 1.1}
(1.3)	q	{OC: 1.2}
(1.4)	r	{OC: 1.2}
(2)	$p \rightarrow q$	{1.1 → 1.3}
(3)	$p \rightarrow r$	{1.1 → 1.4}
	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	{JC: 2; 3}

١٤ ـ أما المقررة التالية :

T 17 $\qquad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$

فيمكن البرهنة عليها على مرحلتين:

البرهان (أ) المرحلة الأولى

(1)	$p \rightarrow r$	{a}
(2)	$q \rightarrow r$	
(3)	$p \vee q$	
(4)	$\neg r$	{a, i, p}
(5)	$\neg p$	{toll.: 1, 4}
(6)	$\neg q$	{toll.: 2, 4}
(7)	q	{OD: 3, 5}

تناقض {٦، ٧}

البرهان (ب) المرحلة الثانية

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(1.3)	r	{RD: 1, 1.2}
(2)	$p \rightarrow r$	{1.1 → 1.3}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD: 2.1}
(2.3)	r	{RD: 1, 2.2}
(3)	$q \rightarrow r$	{2.1 → 2.3}
	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	{JC: 2, 3}

نلاحظ أن البرهان على المقررة التي لدينا هام ومفيد في حالات الجبر المألوف، فباستخدام المقررة، نجد أن الشرط في الصورتين التاليتين:

(١) $X \leq -2 \rightarrow f(x) > 0$

أو الصورة

(٢) $x < -2 \vee x = -2 \rightarrow f(x) > 0$

يكافىء

(١)' $x < -2 \rightarrow f(x) > 0$

(٢)' $x = -2 \rightarrow f(x) > 0$

هذا التضمن البسيط هو ما نطلق عليه قانون إضافة المقدمات The law of addition of antecedents.

١٥ ـ قاعدة الإحراج المركب التي تنص عليها المقررة:

T 18 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge q) \rightarrow r$

هذه الصيغة تسمح لنا بأن نستنبط من مقدمتين لهما التالي نفسه والفصل بين المقدمتين، تسمح لنا باستنباط تالي التضمن. والمثال التالي يوضح لنا كيفية الاستدلال بالقاعدة السابقة.

$$\frac{\begin{array}{c} n = 1 \rightarrow (n+1)^2 > n^2 \\ n > 1 \rightarrow (n+1)^2 > n^2 \\ n = 1 \vee n > 1 \end{array}}{(n+1)^2 > n^2}$$

١٦ ـ قانون سلب الفصل The law of negating a disjunction الذي تقرره المقررة:

T 19 $\qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(2)	$\neg p$	{1.1 → Contr. (1, 1.2)}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD. 2.1}
(3)	$\neg q$	{2.1 → Contr. (1, 2.2)}
	$\neg p \wedge \neg q$	{JC. 2, 3}

وباستخدام المقررة السابقة يصبح سلب الفصل مكافئاً لوصل عناصر نفيه، على سبيل المثال:

(١) الصيغة $\qquad \neg(a > b \vee a = b)$

(٢) تكافىء الصيغة $\qquad \neg a > b \wedge \neg a = b$

كذلك يمكن أن نشتق من المقررة السابقة قاعدة الفصل السالب على النحو التالي:

ND $\qquad \dfrac{\neg(\emptyset \vee \varphi)}{\begin{array}{c}\neg\emptyset \\ \neg\varphi\end{array}} \qquad\qquad \dfrac{\neg(\emptyset \vee \varphi)}{\neg\emptyset \wedge \neg\varphi}$

١٧ ـ قانون سلب الوصل The law of negating a Conjunction الذي تقرره المقررة:

$$T\ 20 \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(2)	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	{a-i-p}
(3)	$\neg\neg p$	{ND. 2}
(4)	$\neg\neg q$	{ND. 2}
(5)	p	{ON. 3}
(6)	q	{ON. 4}
(7)	$p \wedge q$	{JC. 5, 6}

وهكذا يمكن الاستمرار في البرهان على الجزء الثاني.

لكننا نلاحظ أن المقررة T 19 وكذا المقررة T 20 متشابهتان من حيث التركيب. وقد سبق أن وجدناهما من قبل لدى المنطقي دي مورجان، وعرفهما مناطقة القرن التاسع عشر باسم قوانين دي مورجان. والأكثر من هذا إنهما وجدتا لدى مناطقة القرنين الرابعَ عشر والخامس عشر، خاصة لدى أوكام (ق ١٤٠).

١٨ ـ قانون عدم التناقض الذي تقرره المقررة:

$$T\ 22 \qquad \neg(p \wedge \neg p)$$

البرهان

(1)	$p \wedge \neg p$	{a-i-p}
(2)	p	{OC. 1}
(3)	$\neg p$	{OC. 1}

تناقض {٢، ٣}.

١٩ ـ قانون الثالث المرفوع وصورته تقررها المقررة:

$$T\ 23 \qquad p \vee \neg p$$

البرهان

(1)	$\neg (p \vee \neg p)$	{a-i-p}
(2)	$\neg p$	{ND. 1}
(3)	$\neg \neg p$	

تناقض {٢، ٣}.

نلاحظ على المقررتين السابقتين (قانون عدم التناقض، قانون الثالث المرفوع) أن أرسطو أول من قدم صياغة لهما، وأنه أول من قدم الصياغة الميتامنطقية لهما، حيث يعني قانون عدم التناقض أن المتناقضتين لا تصدقان معاً. ويعني قانون الثالث المرفوع أن واحدة فقط من القضيتين المتناقضتين يجب أن تكون صادقة - لقد دافع أرسطو في كتاب الميتافيزيقا عن قانون الثالث المرفوع، وامتحن صحة القانون ومشروعيته بالإشارة إلى حوادث المستقبل غير المحددة، وقرر في هذا الصدد أن تبنى هذا القانون بالنسبة لحوادث المستقبل سيفضي إلى النتيجة القائلة بأن كل شيء سوف يحدث هو ضروري. إلا أن لوكاشيفتش في الربع الأول من هذا القرن، خاصة فيما بين الأعوام ١٩١٨ - ١٩٢٠ حين أسس حساب المنطق الثلاثي القيم لم يستعن بقانون الثالث المرفوع، ولم يتبين أية ضرورة فيه.

٢٠ - قانون العامل الجديد The law of a New Factor وهو ما تقرره المقررة:

T 24 $\quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

هذا القانون يمكن البرهنة عليه بنفس الصورة السابقة للبرهان، إلا أن أهميته تبدو أكثر في استخدامه كصورة من صور الاستدلال، مثل الصورة التالية:

$$\frac{a > 2 \rightarrow a > o}{a > 2 \wedge a < 9 \rightarrow a > o \wedge a < 9}$$

أو

$$2 < a < 9 \rightarrow o < a < 9$$

٢١ ـ قانون العامل الجديد The law of a new element وتقرره المقررة:

T 26 $\quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(2)	$p \vee r$	
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	q	{RD. 1, 1.1}
(1.3)	$q \vee r$	{JD. 1.2}
(2.1)	r	{ad. a}
(2.2)	$q \vee r$	{JD. 2.1}
	$q \vee r$	{1.1 → 1.3, 2.1 → 2.2, 2}

٢٢ ـ قانون إضافة التضمن الذي تقرره المقررة:

T 27 $\quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	q	{RD. 1, 1.1}
(1.3)	$q \vee s$	{JD. 1.2}
(2.1)	r	{ad. a}
(2.2)	s	{RD. 2, 2.1}
(2.3)	$q \vee s$	{JD. 2.2}
	$q \vee s$	{1.1 → 1.3, 2.1 → 2.3, 3}

وهناك المثال الآتي لتطبيق هذا القانون في حالات الجبر المألوف:

$$\frac{\begin{array}{c} a > b \rightarrow a^3 > b^2 \\ a = b \rightarrow a^2 = b^2 \end{array}}{a > b \vee a = b \rightarrow a^2 > b^2 \vee a^2 = b^2}$$

or:

$$a \geqslant b \rightarrow a^2 \geqslant b^2$$

٢٣ ـ وكذلك المقررة:

T 29 $\neg p \vee q \equiv (p \rightarrow q)$

هذه المقررة سبق لنا أن قدمنا برهاناً على الشق الأول منها $\neg p \vee q$ في المقررة T 4 b، ولذا نقدم البرهان هنا على الشق الثاني.

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	q	{RD: 1, 1.1}
(1.3)	$\neg p \vee q$	{JD:,1.2}
(2.1)	$\neg p$	{ad. a}
(2.2)	$\neg p \vee q$	{JD: 2.1}
	$\neg p \vee q$	{1.1 → 1.3, 201 → 2.2}

٢٤ ـ ويبرهن نسق سلوبسكي ـ بوركوفسكي على قانون الأنساق المغلقة للمصادرات، والذي قد يسمى أحياناً عكس التضمن، أو قانون هوبر Hauber's law وهو ما تقرره

T 32 $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \neg(q \wedge s) \rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a.}
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$p \vee r$	
(4)	$\neg(q \wedge s)$	
(5)	$\neg q \vee \neg s$	{RD_E: T 20, 4}
(1.1)	q	{ad. a}
(1.2)	$\neg s$	{OD: 5, 1.1}
(1.3)	$\neg r$	{toll. : 2, 1.2}
(1.4)	p	{OD: 3, 1.3}
(6)	$q \rightarrow p$	{1.1 → 1.4}
(2.1)	s	{ad. a}
(2.2)	$\neg q$	{OD: 5, 2.1}
(2.3)	$\neg p$	{toll. : 1, 2.2}
(2.4)	r	{OD: 3, 2.3}
(7)	$s \rightarrow r$	{2.1 → 2.4}
	$(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$	{JC: 6, 7}

ولكن يجب أن نلاحظ أن هذه المقررة في غاية الأهمية، إذ قد تشتق منها قواعد تطبيقية ذات فائدة كبيرة، فإذا كان عدد التضمنات التي لدينا n فإن قاعدة التضمنات العكسية في هذه الحالة تتخذ الصورة التالية :

$$\begin{array}{c}
\varnothing_1 \rightarrow \varphi_1 \\
\varnothing_2 \rightarrow \varphi_2 \\
\cdots\cdots \\
\varnothing_n \rightarrow \varphi_n \\
\varnothing_1 \vee \varnothing_2 \vee \ldots \vee \varnothing_n \\
\neg(\varphi_i \wedge \varphi_j) \text{ for } 1 \leq i \neq j \leq n \\
\hline
\varphi_1 \rightarrow \varnothing_1 \\
\varphi_2 \rightarrow \varnothing_2 \\
\cdots\cdots \\
\varphi_n \rightarrow \varnothing_n
\end{array}$$

معنى هذا أنه إذا كان لدينا n من التضمنات المثبتة والفصل المتعلق بمقدمات تلك التضمنات، وإذا كان تاليها يستبعد تلقائياً الواحد بعد الآخر، إذن فإنه سيكون بإمكاننا أن نعكس كلاً من هذه التضمنات.

إن السؤال الآن هو: لقد قدم لنا نسق البرنكيبيا تعريفات متعددة للدوال القضايا، وهذه التعريفات وغيرها من الدوال الأخرى يمكن لها في ضوء القوانين المحددة التي وضعت للوصل والفصل والتضمن والسلب، أن تزودنا بقيم لصدق تلك الدوال عن طريق قوائم الصدق، فيكون بالتالي من المألوف لدينا أن نستخدم قائمة الصدق، ونبرهن بها على صحة التعريفات المعطاة، فتصبح قائمة الصدق أيضاً وسيلة أساسية - غير طريق البرهان المألوف - للبرهنة على صحة ضروب القياس مثلاً. ونحن نجد الآن في نسق سلوبسكي - بوركوفسكي تقريراً لكثير من المقررات، مثل التي قدمنا طرفاً منها وغيرها، وما يبرهن عليها بصورة رياضية، بدون استخدام قوائم الصدق. ألا يمكن أن نجد في النسق الذي قدمناه إذن ما يشير إلى استخدام قوائم الصدق؟.

الواقع أن نسق سلوبسكي - بوركوفسكي يفسح مجالاً هاماً لتناول هذه المسألة بصورة دقيقة، وأكثر تحديداً مما نألفه. إذ أن النسق يلجأ إلى ما يطلق عليه «منهج الصفر - واحد» Zero - One method لتحقيق الصيغ التي لدينا. وقد يبدو هذا المصطلح على درجة من الغموض؛ إلا أن المسألة ليست كذلك. نحن نعلم أن للقضية الواحدة قيمة صدق، وقيمة كذب. إذا كانت القضية صادقة True، أشرنا إليها في الأنساق المألوفة لنا مثل نسق برنكيبيا بالمختصر T، أما إذا كانت القضية كاذبة False فإننا نشير إليها بالمختصر F. لكن نسق سلوبسكي - بوركوفسكي أراد أن يتخلص من هذين الرمزين: ويستخدم قيمتين عدديتين هما الواحد، والصفر، ويرمز لهما على التوالي: 1، 0. وعلى هذا الأساس يقدم لنا النسق صياغة جديدة للدوال المختلفة على النحو التالي:

(١) السلب negation

$\varnothing$	$\neg\varnothing$
1	0
0	1

نلاحظ أن القضية $\neg\varnothing$ تكون كاذبة عندما تكون $\varnothing$ صادقة، وكذلك تكون $\neg\varnothing$ صادقة حينما تكون $\varnothing$ كاذبة. وهذا هو قانون السلب المألوف كما نجده في نسق برنكيبيا.

(٢) قائمة الوصل Conjunction

$\varnothing$	φ	$\varnothing \wedge \varphi$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

يقرر قانون الوصل في هذه الحالة، أن الوصل يصدق فقط إذا كان كلا من عنصريه صادقاً، ويكون الوصل كاذباً إذا كذب أحد عناصره على الأقل.

(٣) قائمة الفصل disjunction

$\varnothing$	φ	$\varnothing \vee \varphi$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

الفصل يصدق فقط وفقط إذا صدق أحد عناصره على الأقل، ويكذب الفصل إذا كذب عنصراه معاً.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن النسق يقرر التمييز الدقيق بين الفصل غير الاستبعادي non - exclusive، والفصل الاستبعادي exclusive. أما

النوع الذي قدمناه تواً في القائمة السابقة فهو الفصل الاستبعادي وهو المألوف لدينا. وأما النوع الثاني من الفصل، فهو ما توضحه القائمة:

$\emptyset$	φ	$\emptyset \veebar \varphi$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

ومعنى هذا أن الفصل الاستبعادي يصدق فقط وفقط إذا صدق عنصر واحد من عناصره فقط، ويكذب إذا صدق عنصراه معاً، أو إذا كذبا معاً. والسبب في اعتبار هذا الفصل استبعادي هو أن صدق عنصر واحد فية فقط يستبعد صدق العنصر الآخر حين يكون الفصل صادقاً ككل.

ولقد جاء التمييز بين هذين النوعين بناءً على التمييز بين صورتين لغويتين هما:

(١) أن التعبير عن الفصل في اللغة الانجليزية الدارجة يتم إذا قلنا (p or q) أي [p أو q]. نلاحظ هنا الثابت (... or ...).

(٢) وكذلك الصيغة (either p or q)، حيث نلاحظ (either... or...) وهي أيضاً صيغة تعبر عن الفصل.

والمعروف أن نسق برنكيبيا وحّد بين الصيغتين واستخدام الثابت ٧ للتعبير عن الفصل إجمالاً. إلا أن نسق سلوبسكي - بوركوفسكي وجد ضرورة التمييز بينها على النحو التالي:

(′) الصيغة (p or q) تكتب) (p ∨ q).

(′c) الصيغة (either p or q) تكتب (p ⊻ q).

(٤) قائمة التضمن Implication

$\varnothing$	φ	$\varnothing \rightarrow \varphi$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

يكون التضمن بمقتضى هذه القائمة كاذباً فقط وفقط إذا كان مقدمة صادقاً وتاليه كاذب. ويصدق التضمن في بقية الحالات الأخرى.

(٥) قائمة التكافؤ equivalence

يتم التوصل لقائمة صدق التكافؤ من قائمة صدق التضمن وقاعدتي وصل التكافؤ وحذف التكافؤ، على النحو التالي:

$\varnothing$	φ	$\varnothing \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \varnothing$	$\varnothing \equiv \varphi$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

نلاحظ أن التكافؤ يصدق في الحالة الأولى وكذلك الحالة الرابعة من قاعدة وصل التكافؤ التي تقرر أنه إذا كانت التضمنات البسيطة ـ العكسية صادقة فإن التكافؤ يكون صادقاً. أما في الحالة الثانية فإن التضمن العكسي $\varphi \rightarrow \varnothing$ يكون كاذباً وهو ينتج بموجب الصيغة الثانية من قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\varnothing \equiv \varphi}{\varphi \rightarrow \varnothing}$$

وبذا يكون التكافؤ $\varphi \equiv \emptyset$ كاذباً أيضاً. أما في الحالة الثالثة، فإن التضمن البسيط $\varphi \rightarrow \emptyset$ يكون كاذباً وذلك بمقتضى قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\emptyset \rightarrow \varphi}$$

التي ينتج منها أن التكافؤ $\varphi \equiv \emptyset$ كاذب أيضاً.

ومن ثم فإن القائمة السابقة تقرر القانون الآتي للتكافؤ: التكافؤ يكون صادقاً فقط وفقط إذا كان عنصراه لهما نفس قيمة الصدق، ويكذب التكافؤ فقط وفقط إذا كانت قيم صدق عنصراه مختلفة.

المـراجـع

أولاً: المراجع العربية:

١ - الدكتور محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٦٩.

٢ - برتراند رسّل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة د. محمد مرسي أحمد ١٩٦٣.

٣ - يان لوكاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة د. عبد الحميد صبرة، منشأة المعارف، الاسكندرية، ١٩٦١.

٤ - الدكتور ماهر عبد القادر محمد،نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية ١٩٧٩

ثانياً: الدوريات الأجنبية:

1 — Helmer, O., On The Theory of axiom- System, Analysis, Vol. 3, 1935.

2 — Lewis, C. I., Alternative Systems of Logic, Monist, 42, 1932.

ثالثاً: المراجع الأجنبية:

1 — Aristotle, Analytica Priora.

2 — Bell, E. T., The Queen of the Sciences, Batimore, Williams and Wilkins, 1931.

3 — Heath, T. L., The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge, England, The University Press, 1908.

4 — Henkin, L. and Suppes, P. and Tarski, A., The Asiomatic Method, Amsterdam, North - Holland pub, Co., 1959.

5 — Lewis, C. I., A Survey of Symbolic logic, Berkeley, 1918.

6 — ——————— and Langford, C.H., Symbolic Logic, New York, 1932.

7 — Quine, W. V., Mathematical Logic, New York, 1940.

8 — ———————, Elementary Logic, Boston, 1941.

9 — ———————, From a Logical point of view, Harvard, New York, 1953.

10 — ———————, Selected logic papers, New York, 1966.

11 — ———————, Methods of logic, 3rd, ed. London, 1974.

12 — Reichenbach, H., «Bertrand Russell's Logic», ed. in The Philosophy of Bertrand Russell by P. A. Schipp, 1944.

13 — Struik D. J., A Concise History of Mathematics, 2 Vols, Dover pub, New York, 1948.

14 — Whitehead, A.N and Ressell, B., Principia Mathematica, 3 vol, Cambridge, Cambridge University Press, 1910 - 1913.

فهرست الموضوعات